现代数学基础丛书

高斯过程的样本轨道性质

● 林正炎 陆传荣 张立新 著





科学出版社

(O-1379.0101)

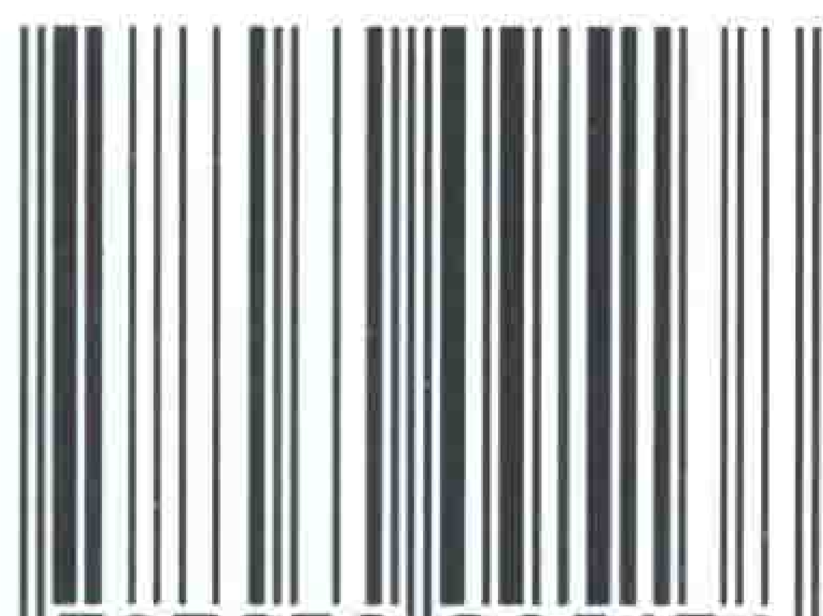
责任编辑：刘嘉善

封面设计：槐寿明

现代数学基础丛书



巴拿赫空间引论
近代调和分析方法及其应用
递归论
拓扑群引论
公理集合论导引
丢番图逼近引论
Banach代数
紧黎曼曲面引论
广义哈密顿系统理论及其应用
解析数论基础
数理统计引论
多元统计分析引论
概率论基础
微分动力系统原理
二阶椭圆型方程与椭圆型方程组
分析概率论
非线性发展方程
黎曼曲面
傅里叶积分算子理论及其应用
反应扩散方法引论
离散鞅及其应用
复合算子理论
微分方程定性理论
概率论基础和随机过程
复解析动力系统
模型论基础
环与代数
仿微分算子引论
实分析导论
对称性分岔理论基础
线性微分方程的非线性扰动
随机点过程及其应用
复变函数逼近论
线性整数规划的数学基础
组合矩阵论
算子代数
Banach空间中的非线性逼近理论
Gel'fond-Baker方法在丢番图方程中的应用
实用微分几何引论
半群的S-系理论
有限典型群子空间轨道生成的格
有限群导引（上册、下册）
随机模型的密度演化方法
非线性偏微分复方程
调和分析及其在偏微分方程中的应用
惯性流形与近似惯性流形
数学规划导论
拓扑空间中的反例
拓扑空间论
非经典数理逻辑与近似推理



ISBN 7-03-009513-8/O·1379

定 价：29.00 元

内 容 简 介

本书论述Gauss过程的样本轨道性质，内容包括：Gauss变量和Gauss过程的一些基本性质，Gauss过程的连续性，Gauss过程的连续模与大增量的极限性质，无穷维Gauss过程的连续模与大增量的极限性质，Gauss过程的重对数律和增量的下极限性质，以及Gauss过程的p变差和一些分形性质.

本书大部分内容是作者们的研究成果，具有较高的学术水平.

本书适合高等学校概率论专业的大学生、研究生与数学研究工作者阅读与参考.

图书在版编目(CIP)数据

高斯过程的样本轨道性质/林正炎，陆传荣，张立新著 .—北京：科学出版社，2001.

(现代数学基础丛书)

ISBN 7-03-009513-8

Ⅰ.高… Ⅱ.①林…②陆…③张… Ⅲ.高斯过程-样本函数-轨道 Ⅳ.O211.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第037557号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001年11月第一版 开本：850×1168 1/32

2001年11月第一次印刷 印张：11 3/4

印数：1—3 000 字数：307 000

定价：29.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈北燕〉)

序

我十分高兴介绍这部关于 Gauss 过程及其相关过程的样本轨道性质的精细分析的优秀著作. 在 20 世纪 20 年代的一系列论文中, N. Wiener 从事 Brown 运动的数学分析的研究. 他指出, 除去一个概率 (关于 Wiener 测度) 为零的集合外, 所有 Brown 运动的样本轨道是连续而不可微的曲线. 在 20 世纪 40 年代左右, P. Lévy 证明了著名的连续模定理, 即对 Brown 运动 (Wiener 过程) 的几乎所有样本轨道建立了精确的连续性速度. 自此以后, 在关于一般 Gauss 过程和许多其他相关的随机过程样本轨道性质的研究文献中, 这些基本贡献已成为首要的指导性结果.

在 M. Csörgő 和 P. Révész 的 1981 年的专著的第一章中, 我们给出了 Wiener 过程的构造性证明并论证了它的样本轨道的精确细致的分析性质, 受此启发, 我们在 1987 年和林正炎一起, 沿着类似的思路开始了无穷维 Ornstein-Uhlenbeck 过程样本轨道性质的研究. 后来, 这一研究思路已发展到对较一般的 Gauss 过程这样一个广泛类型的过程以及其他随机过程的类似研究. 结合世界范围的 “法国学派” 的基本方法和成就, 这个课题方面的研究文献是十分浩瀚的. 由林正炎、陆传荣和张立新撰写的这一著作对研究随机过程的内在样本轨道性质这一相当漂亮的、发展中的复杂领域, 在全面的基础知识和若干最近的进展方面作了极为及时的基本阐述.

Miklos Csörgő

1997 年 9 月

目　　录

引论 1

第一章　Gauss 变量和 Gauss 过程的若干基本结果 9

§ 1.1　Gauss 过程最大值的尾概率估计 11

§ 1.2　比较原理 19

第二章　Gauss 过程的连续模和大增量的极限性质 35

§ 2.1　Gauss 过程的连续性 35

§ 2.2　分数 Wiener 过程 59

§ 2.3　两参数 Wiener 过程的大增量 92

§ 2.4　两参数分数 Lévy-Wiener 过程 111

§ 2.5　两参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程 130

§ 2.6　带核的两参数 Gauss 过程 156

§ 2.7　Gauss 过程局部时的连续模 187

第三章　无穷维 Gauss 过程的连续模和大增量 211

§ 3.1　l^p 值 Gauss 过程的连续性 211

§ 3.2　B 值随机过程的增量 226

§ 3.3　l^p 值 Gauss 过程的增量 236

§ 3.4　l^∞ 值 Gauss 过程的增量 263

第四章　Gauss 过程的重对数律和增量的几乎处处下极限 284

§ 4.1　Gauss 过程的重对数律 284

§ 4.2　Gauss 过程的小球概率和 Chung 重对数律 295

§ 4.3　Gauss 场的小球概率和 Chung 重对数律 303

§ 4.4　Gauss 过程增量的下极限 320

§ 4.5　两参数 Gauss 过程的下极限 327

§ 4.6 Gauss 过程的其他轨道性质 338
参考文献 349
索引 362

引　论

Gauss 过程的样本轨道性质是研究 Gauss 过程的基本性质的重要方面. 对 Gauss 过程样本轨道性质的研究最早是关于它的连续性、有界性及连续模定理, 首先从具有优良性质的 Wiener 过程开始. Lévy 于 1937,1948 年就给出了 Wiener 过程 $\{W(t); t \geq 0\}$ 的精确连续模定理.

定理 0.1 我们有

$$\lim_{h\to 0} \sup_{0\le t\le 1-h} \sup_{0\le s\le h} \frac{|W(t+s)-W(t)|}{(2h\log(1/h))^{1/2}} = 1 \quad \text{a.s.},$$

$$\lim_{h\to 0} \sup_{0\le t\le 1-h} \frac{|W(t+h)-W(t)|}{(2h\log(1/h))^{1/2}} = 1 \quad \text{a.s.}$$

对于一般的 Gauss 过程的连续性和有界性的研究, Adler (1990) 的专著综述了这一方面的成果. 本书将在 §2.1 中介绍部分主要结果.

1964 年 Strassen 对 Wiener 过程的泛函重对数律是一个关于 Wiener 过程样本轨道性质的重要成果. 20 世纪 70 年代, M. Csörgő 和 P. Révész 等对 Wiener 过程的大增量作了系统的开创性研究. 他们 1981 年的专著 "Strong Approximations in Probability and Statistics" 综述了当时的主要成果, 在 Wiener 过程增量理论方面有:

定理 0.2 设 a_T 是 T 的单调非降函数, 满足

(i) $0 < a_T \leq T$,

(ii) T/a_T 非降.

那么有

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\sup_{0\le s\le a_T}\beta_T|W(t+s)-W(t)|=1\quad\text{a.s.},$$

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\beta_T|W(t+a_T)-W(t)|=1\quad\text{a.s.},$$

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\le s\le a_T}\beta_T|W(T+s)-W(T)|$$
$$=\limsup_{T\to\infty}\beta_T|W(T+a_T)-W(T)|=1\quad\text{a.s.},$$

其中 $$\beta_T=\{2a_T(\log(T/a_T)+\log\log T)\}^{-1/2}.$$

若还满足

(iii) $$\lim_{T\to\infty}\left(\log(T/a_T)\right)/\log\log T=\infty,$$

那么

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\sup_{0\le s\le a_T}\beta_T|W(t+s)-W(t)|=1\quad\text{a.s.},$$

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\beta_T|W(t+a_T)-W(t)|=1\quad\text{a.s.}$$

若 (iii) 不真，那么

$$\liminf_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\sup_{0\le s\le a_T}\beta_T|W(t+s)-W(t)|<1\quad\text{a.s.}$$

以后就 a_T 更靠近 T 的情形有若干作者作了进一步讨论. 例如，若将 (iii) 改为

(iv) $\lim_{T\to\infty}\left(\log(T/a_T)\right)/\log\log T=r$, $0<r\le\infty$, 则有

$$\liminf_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\beta_T|W(t+a_T)-W(t)|=\left(\frac{r}{1+r}\right)^{1/2}\quad\text{a.s.};$$

若将 (iii) 改为

(v) $\lim_{T\to\infty}\left(\log(T/a_T)\right)/\log\log\log T=\infty$, 则有

$$\liminf_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\sup_{0\le s\le a_T}\gamma_1(T)|W(t+s)-W(t)|=1\quad\text{a.s.},$$

其中

$$\gamma_1(T)=\left\{2a_T\log\left(1+\frac{\pi^2}{16}\frac{T}{a_T\log\log T}\right)\right\}^{-1/2};$$

而若

(vi) $\lim_{T\to\infty}(T/a_T)/\log\log T=\infty$ 成立，则有

$$\liminf_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\sup_{0\le s\le a_T}\gamma_0(T)|W(t+s)-W(t)|=1\quad\text{a.s.},$$

$$\liminf_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\gamma_0(T)|W(t+a_T)-W(t)|=1\quad\text{a.s.},$$

其中 $\gamma_0(T)=\{2a_T(\log(T/a_T)-\log\log\log T)\}^{-1/2}$.

显然，定理 0.1 和定理 0.2 与下述 Lévy 重对数律相关:

定理 0.3 (Lévy 1937, 1948). 我们有

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{|W(T)|}{\sqrt{2T\log\log T}}=1\quad\text{a.s.},$$

$$\limsup_{h\to 0}\frac{|W(h)|}{\sqrt{2h\log\log 1/h}}=1\quad\text{a.s.}$$

在 Csörgő 和 Révész 的上述专著中还研究了 Wiener 过程的另一类样本轨道性质. 他们给出了 Wiener 过程的不可微模，并研究了 Wiener 过程增量有多小.

定理 0.4 我们有

$$\lim_{h\to 0}\inf_{0\le t\le 1-h}\sup_{0\le s\le h}\sqrt{\frac{8\log h^{-1}}{\pi^2 h}}|W(t+s)-W(t)|=1\quad\text{a.s.}$$

定理 0.5 设 a_T 如定理 0.2，那么

$$\liminf_{T\to\infty}\inf_{0\le t\le T-a_T}\sup_{0\le s\le a_T}\gamma(T)|W(t+s)-W(t)|=1\quad\text{a.s.}$$

其中

$$\gamma(T)=\left(\frac{8}{\pi^2 a_T}(\log(T/a_T)+\log\log T)\right)^{1/2}.$$

进一步若 (iii) 被满足，那么 lim inf 可换成 lim.

由定理 0.4 易知， Wiener 过程的几乎所有样本轨道是无处可微的. 容易看出定理 0.4 和定理 0.5 与下述 Chung 重对数律相关:

定理 0.6 我们有

$$\liminf_{T\to\infty}\left(\frac{8\log\log T}{\pi^2 T}\right)^{1/2}\sup_{0\le t\le T}|W(t)|=1 \quad \text{a.s.},$$

$$\liminf_{h\to 0}\left(\frac{8\log\log 1/h}{\pi^2 h}\right)^{1/2}\sup_{0\le t\le h}|W(t)|=1 \quad \text{a.s.}$$

在上述专著中还讨论了两参数 Wiener 过程增量有多大.

自 Csörgő 和 Révész 的 1981 年专著发表以后，强逼近理论发展十分迅速，对 Wiener 过程样本轨道性质，进一步在对许多特殊的 Gauss 过程的轨道性质的研究有着一系列重大进展. 在 1987 年，应 M. Csörgő 院士之邀，林正炎访问了加拿大的 Carleton 大学. M. Csörgő 提议对 Ornstein-Uhlenbeck 过程的精确样本轨道性质加以研究. 从那时开始， M. Csörgő, 林正炎，邵启满和许多匈牙利及中国学者在这一课题上，不仅对某些特殊的 Gauss 过程而且对较一般的 Gauss 过程进行了深入的研究. 林正炎、陆传荣 1992 年的专著《强极限定理》综述了当时国内外有关成果，在 Wiener 过程与 Gauss 过程的样本轨道性质方面有：

1. 完善了对 Wiener 过程增量理论的研究，如详细介绍了在条件 (vi) 下邵启满证明的关于 Wiener 过程增量的下极限结果，讨论了 Wiener 过程滞后增量及增量的一般形式，也讨论了滞后形式的下极限结果及精确收敛速度.

2. 将 Wiener 过程增量在条件 (v) 下的结果拓广于两参数 Wiener 过程情形, 讨论了两参数 Wiener 过程滞后增量及增量的一般形式.

3. 介绍了 Ortega (1984) 关于分数 Wiener 过程增量的大小与连续模结果.

4. 开创性地研究了无穷维 Ornstein-Uhlenbeck 过程导出的过程, 如部分和过程、无穷级数及 l^2 模平方过程等的样本轨道性质.

在 20 世纪 90 年代中, 除去进一步对 Wiener 过程增量作深入讨论外, 对各种有实际背景的 Gauss 过程增量的上极限与下极限的研究取得了一系列完美的成果. 本书汇集了样本轨道性质方面的主要结果, 包括一般 Gauss 过程的连续性、不可微性、连续模和大增量性质等等. 对某些特殊的 Gauss 过程 (例如 Ornstein-Uhlenbeck 过程), 进行了深入细致讨论. 本书拓展和深化了上述两专著的内容, 可以看作是它们的续编.

在第一章中, 介绍了 Gauss 过程尾概率估计, 如 Borell 不等式 (定理 1.1.1), Fernique 不等式 (定理 1.1.3); 用于研究一般 Gauss 过程的 Slepian 不等式 (定理 1.2.1), Anderson 不等式 (定理 1.2.2) 和 Khatri-Šidák 不等式 (定理 1.2.4) 等基本不等式. 关于 Borel-Cantelli 引理的一个拓广形式也于引理 2.1.1 中给出.

在第二章中, 先将 Gauss 过程连续性、有界性等基本结果作一综合论证于 §2.1 中. 在 §2.2 中将对 Wiener 过程成立的许多结果拓展到分数 Wiener 过程上, 介绍分数 Wiener 过程连续模、大增量及其下极限结果、增量的一般形式等, 最后还给出增量负相关的 Gauss 过程的连续模及大增量等有关结果. 在 §2.3 中, 讨论了两参数 Wiener 过程在类似于条件 (vi) 下的下极限结果. 在 §2.4—2.6 中讨论了几类两参数 Gauss 过程如两参数 Lévy-Wiener 过程、两参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程及由此拓广的带核两参数 Gauss 过程的连续模及大增量结果. 最后在 §2.7 中还讨论了 Gauss 过程局部时的有关结果.

在第三章中详细介绍了无穷维 Gauss 过程的连续模和大增

量. 首先介绍了 l^p 值 Gauss 过程连续性条件，特别给出了 l^2- 值 Ornstein-Uhlenbeck 过程连续性的充分必要条件. 为讨论 l^p- 值 Gauss 过程的连续模与大增量，从对 B 值 Gauss 过程给出增量的上极限估计开始，在增量具有某种负相关条件下给出了连续模与大增量结果. 最后还讨论了 l^∞ 值 Gauss 过程的连续模与大增量.

在第四章中，首先在 §4.1 对分数 Wiener 过程及一类具有平稳增量的 Gauss 过程证明了 Strassen 型泛函重对数律，讨论了具有指数 α ($\alpha > 0$) 的自相似 Gauss 过程的 Strassen 重对数律的收敛速度. 并简述了最近关于 Wiener 过程的 Strassen 型泛函连续模与大增量定理及其精确收敛速度. 在 §4.1 中还讨论了 Wiener 过程及一类平稳 Gauss 过程的 Erdös-Révész 重对数律，由后者即可导出关于独立 Ornstein-Uhlenbeck 过程无穷级数及分数 Wiener 过程的 Erdös-Révész 重对数律.

第四章的 §4.2—§4.5 讨论 Gauss 过程和 Gauss 随机场的 Chung 重对数律、不可微模及增量有多小等下极限问题. 此时小球概率估计是证明有关结果的关键. 在 §4.2 中，详细介绍了邵启满关于具有平稳增量 Gauss 过程，特别是分数 Wiener 过程的小球概率估计，由此即可导出分数 Wiener 过程的 Chung 重对数律，该节中也给出了 Ornstein-Uhlenbeck 过程无穷级数的 Chung 重对数律. 在 §4.3 节讨论了 Gauss 场的小球概率估计、 Chung 重对数律. 在 §4.4 中介绍了 Gauss 过程增量的下极限，特别给出了独立 Ornstein-Uhlenbeck 过程无穷级数的不可微模. 在 §4.5 中，讨论了两参数 Wiener 过程的下极限，给出了两参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程的不可微模和 Chung 重对数律. 值得指出的是，关于小球概率估计及有关结果至今仍是人们关注的热点问题，近期仍有许多学者在研究这一问题.

在 §4.6 中介绍了 Gauss 过程的 p 变差和分形性质. 首先给出 Gauss 过程 p 变差的一个较一般的结果. 其次介绍了 Gauss 场的像与图的分形性质，还讨论了 Gauss 过程增量的分形性质，最后在 §5.4 中论述了 Ornstein-Uhlenbeck 过程的无穷级数的增量与

Chung 重对数律有关的分形性质.

本书的写作和出版得到中国科学院出版基金、中国国家自然科学基金、浙江省自然科学基金和浙江大学数学系的资助, 加拿大皇家科学院院士 M. Csörgő 为本书写了序言, 谨此一并致谢.

林正炎　陆传荣　张立新

2000 年 2 月于浙江大学

第一章　Gauss 变量和 Gauss 过程的若干基本结果

在这一章中，我们将介绍本书需要的若干准备结果，特别是给出一批重要不等式，包括 Borell 不等式、 Fernique 不等式、 Slepian 不等式、 Anderson 不等式、 Khatri-Šidák 不等式等.

我们总用 c 表示正常数，其取值在不同的地方可以不同. $K, C, \cdots$ 通常表示绝对常数. $\mathcal{N}$ 为非负整数集， $\mathcal{Z}$ 为整数集， $\mathcal{R}$ 为实数集， $\mathcal{R}_+$ 为正实数集， $\mathcal{Z}_+$ 为正整数集. $A \approx B$ 表示对某个常数 C 成立 $C^{-1}A \le B \le CA$. 符号 $\sim$ 表示两序列等价. $(\cdot)^+, (\cdot)^-, [\cdot]$ 分别表示取正部，取负部，取整函数. Card(A) 表示 (有限) 集 A 中元素的个数， A^c 表示 A 的余集， I_A 表示集合 A 的示性函数. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一完备概率空间. 具有期望 $\mu \in \mathcal{R}$ 和方差 $\sigma^2 \in \mathcal{R}_+$ 的随机变量 X 称为是 Gauss 的 (或正态的)，如果其 Fourier 变换满足

$$Ee^{itX} = e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2},$$

或等价地， X 的分布具有密度函数 $\sigma^{-1}\phi((x-u)/\sigma)$, 其中

$$\phi(x) := (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp(-x^2/2),$$

即

$$P\{(X-\mu)/\sigma \le x\} = \Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \phi(t)\,dt, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

若 $\mu = 0$, 我们称 X 为零均值的 (中心化的), 若还有 $\sigma = 1$, 则称 X 是标准正态变量. $\mathcal{R}^N$ 中的随机向量 $X = (X_1, \cdots, X_N)$ 称为 (零均值)Gauss 向量，如果对任何实数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$, $\sum_{i=1}^N \alpha_i X_i$ 为实值 (零均值)Gauss 随机变量. $\mathcal{R}^N$ 中的零均值 Gauss 随机向量 X 的分布完全由它的对称 (半) 正定协方差矩阵 $\Gamma = (EX_iX_j)_{1 \le i,j \le N}$ 确

定. 事实上, 若 $\Gamma = AA'$, 则 X 与 Ag 同分布, 其中 $g = (g_1, \cdots, g_N)$ 具有 $\mathcal{R}^N$ 中的标准 Gauss 分布 γ_N, 其密度函数为

$$(2\pi)^{-N/2} \exp(-\|x\|^2/2),$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 Euclidean 范数.

设 $X = \{X_t; t \in T\}$ 为具有指标集 T 的一族随机变量, 若每一个线性组合 $\sum \alpha_t X_t$ 是 (零均值)Gauss 变量, 则 X 称为 (零均值)Gauss 过程. 本书中, T 通常是 $\mathcal{R}$ 的某个子集, 有时也是 $\mathcal{R}^k$ 或 $[0,1]^k$ 的某个子集 ($k > 1$ 时, 我们称 X 是多参数的). 若 X 是一个零均值 Gauss 过程, 则它的协方差函数 $\Gamma(s,t) = EX_sX_t, s, t \in T$ 完全确定了它的分布.

若无特别说明, 我们通常设 T 是具有可数稠密子集的距离空间, 并设 X 是一个可分的随机过程, 即存在一个零测集 $\Omega_0 \subset \Omega$ 和一个 T 的可数稠密子集 S 使得对任何 $\omega \notin \Omega_0$, $t \in T$ 和 $\varepsilon > 0$ 有

$$X_t(\omega) \in \overline{\{X_s(\omega); s \in S, d(s,t) < \varepsilon\}},$$

其中闭包取自 $\mathcal{R} \cup \{\infty\}$, 且 $d(\cdot,\cdot)$ 是 T 中的距离. 若 X 可分, 则对每个 $\omega \notin \Omega_0$ 有 $\sup_{t\in T} |X_t(\omega)| = \sup_{s \in S} |X_s(\omega)|$, $\sup_{t \in T} X_t(\omega) = \sup_{s\in S} X_s(\omega)$, 并且 T 中每个可数稠密子集 S 都可取作为可分集. 一个随机过程 $\{X_t; t \in \mathcal{R}^k\}$ 称为是 (强) 平稳的, 如果对任何 $s \in \mathcal{R}^k$, 它与过程 $\{X_{t+s}; t \in \mathcal{R}^k\}$ 同分布. 一个随机过程 $X = \{X_t; t \in T\}$ 称为几乎处处有界 (连续), 或者称它的样本轨道几乎处处有界 (连续), 是指对几乎所有的 ω, 轨道 $t \to X_t(\omega)$ 是有界 (连续) 的.

给定一个 Banach 空间 B, 其对偶空间记为 B', 设存在 B' 中单位球的可数子集 D 使得 $\|x\| = \sup_{f\in D} f(x)$, $x \in B$. 一个 B 中的随机变量 X 称为是 (零均值)Gauss 的, 如果对每个 $f \in D$, $f(X)$ 可测, 并且每个线性组合 $\sum_i \alpha_i f_i(X)$, $\alpha_i \in \mathcal{R}$, $f_i \in D$ 是 (零均值) Gauss 的. 易知, X 可以看作一个以 D 为指标集的 Gauss 过程 $\{f(X);\ f \in D\}$.

有许多关于 Gauss 向量的现代概率不等式，我们这里列出两个，其中一个称为等周不等式：对任何 $\mathcal{R}^N$ 中的 Borel 集 A 有

$$\text{inv}\Phi\big(\gamma_N(A_r)\big) \geq \text{inv}\Phi\big(\gamma_N(A)\big) + r, \tag{1.0.1}$$

其中 A_r 为 A 的 r 阶 Euclidean 邻域；特别地若 $\gamma_N(A) \geq 1/2$, 则有

$$1 - \gamma_N(A_r) \leq 1 - \Phi(r) \leq \frac{1}{2}e^{-r^2/2}.$$

另一个不等式是 Brunn-Minkowski 型不等式：对 $\mathcal{R}^N$ 中的任何凸子集 A, B 和数 $\lambda \in [0,1]$ 有,

$$\begin{aligned}&\text{inv}\Phi\big(\gamma_N(\lambda A + (1-\lambda)B)\big)\\ \geq& \lambda\, \text{inv}\Phi\big(\gamma_N(A)\big) + (1-\lambda)\text{inv}\Phi\big(\gamma_N(B)\big),\end{aligned} \tag{1.0.2}$$

其中 $\lambda A + (1-\lambda)B = \{x \in R^N : x = \lambda a + (1-\lambda)b, a \in A, b \in B\}$.

当 A 是凸集时， (1.0.1) 可由 (1.0.2) 得到，这只要在 (1.0.2) 中取 B 为以原点为中心、半径为 $r/(1-\lambda)$ 的 Euclidean 球，并令 $\lambda \to 1$ 即得.

(1.0.1) 和 (1.0.2) 的证明将不在这里给出，读者可分别参看 Ledoux 和 Talagrand (1991), Ehrhard (1983, 1984, 1986).

在这一章中，我们给出关于 Gauss 过程的两类基本结果. 其中一类是 Gauss 过程最大值的尾概率估计，另一类是比较原理.

§1.1 Gauss 过程最大值的尾概率估计

1.1.1 Borell 不等式

设 X 为一个零均值 Gauss 变量，具有方差 σ^2. 令

$$\Psi(x) := 1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt.$$

则对任何 $x > 0$ 有

$$\begin{aligned}&(1-\sigma^2x^{-2})\big(\sigma/\sqrt{2\pi}\big)x^{-1}e^{-\frac{1}{2}x^2/\sigma^2}\\ &\leq P\{X > x\} = \Psi(x/\sigma) \leq \big(\sigma/\sqrt{2\pi}\big)x^{-1}e^{-\frac{1}{2}x^2/\sigma^2}.\end{aligned} \tag{1.1.1}$$

假设 $\{X_t; t\in T\}$ 为一零均值 Gauss 过程，其样本轨道以概率 1 有界．下述 Borell 不等式告诉我们，只要用 $\sigma_T^2 := \sup_{t\in T} EX_t^2$ 代替 σ^2, 则 $\sup_{t\in T} X_t$ 有与 X 类似的尾概率估计．

定理 1.1.1 设 $\{X_t; t\in T\}$ 为零均值可分 Gauss 过程，样本轨道几乎处处有界．记 $\|X\| = \sup_{t\in T} X_t$. 则对任何 $\lambda > 0$ 有

$$P\{\big|\|X\| - E\|X\|\big| > \lambda\} \le 2\exp\big(-\lambda^2/(2\sigma_T^2)\big), \tag{1.1.2}$$

其中 $\sigma_T^2 := \sup_{t\in T} EX_t^2$.

由于一个取值于 Banach 空间的 Gauss 变量可以看作一个 Gauss 过程，定理 1.1.1 中的过程可以用取值于 Banach 空间的 Gauss 变量代替．另外，(1.1.2) 中的 $E\|X\|$ 可以用 $\|X\|$ 的中位数代替．若用 $\|X\|$ 的中位数代替其期望，则 (1.1.2) 可由等周不等式 (1.0.1) 得到 (参看 Ledoux 和 Talagrand 1991). 我们这里列出一个纯概率的证明，这是由 Maurey 和 Pisier (Pisier 1986) 给出的．

注意到 $\{X_t; t\in T\}$ 是可分的，我们可设存在 T 的一个可数子集 D 使得

$$\sup_{t\in D} X_t = \sup_{t\in T} X_t.$$

从而，证明 Borell 不等式，只要证明用 $\sup_{t\in D} X_t$ 代替 $\|X\|$ 时 (1.1.2) 成立，进而，只要证明 (1.1.2) 对有限的 D 成立．取 $D = \{t_1, \cdots, t_k\}$, $t_i \in T$, $k<\infty$, 下述引理是证明的关键．

引理 1.1.1 设 $f: \mathcal{R}^k \to \mathcal{R}$ 具有一阶，二阶偏导数，并且 f 的所有导数都由 $Ae^{B\|x\|}$ 控制，其中 $A, B < \infty$ 为某两个常数，$\|\cdot\|$ 为通常的 Euclidean 范数．设 $X = (X_{t_1}, \cdots, X_{t_k})$ 为一 k 维的零均值 Gauss 变量，其协方差矩阵为 $V_D = (EX_{t_i}X_{t_j})_{1\le i,j\le k}$. 若对任何 $x, y \in \mathcal{R}^k$ 有 $|f(x) - f(y)| \le \|x-y\|$, 则对任何 $\lambda > 0$ 有

$$P\{|f(X) - Ef(X)| > \lambda\} \le 2\exp(-\lambda^2/(2\sigma^2)), \tag{1.1.3}$$

其中

$$\sigma^2 = \sup_{1\le i\le k} V_D(i,i) = \sup_{1\le i\le k} EX_{t_i}^2.$$

证明 设 $\{B_s; s\ge 0\} = \{(B_s^1,\cdots,B_s^k); s\ge 0\}$ 为 k 维 Wiener 过程，即 B^i, $i=1,\cdots,k$, 为 i.i.d. 标准实值 Wiener 过程. 取 $0\le s_0 < s_1 < \cdots < s_n \le 1$, 令 $\mathcal{F}_j$ 为由 $\{B_{s_0},\cdots,B_{s_j}\}$ 生成的 σ-域，令 $\{V_j; 0\le j\le n\}$ 为一 $\mathcal{R}^k$ 值随机变量序列，对每个 j, V_j 是 $\mathcal{F}_{j-1}$ 可测的. 假设对每个 j, $\|V_j\| < \sigma$ a.s., 记

$$S_m = \sum_{j=1}^{m} \langle V_j, B_{s_j} - B_{s_{j-1}}\rangle. \tag{1.1.4}$$

由 V_j 的可测性和 B_t 的独立增量性，对任何实的 θ 我们有

$$Ee^{\theta S_n} = E\big(e^{\theta S_{n-1}} e^{\theta\langle V_n, B_{s_n} - B_{s_{n-1}}\rangle}\big) \le E\big(e^{\theta S_{n-1}} e^{\frac{1}{2}\theta^2(s_n - s_{n-1})\sigma^2}\big).$$

从而

$$Ee^{\theta S_n} \le e^{\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2}.$$

取 $\theta = \lambda/\sigma^2$, 由 Chebycheff 不等式得

$$\begin{aligned} P\{|S_n| > \lambda\} =& 2P\{S_n > \lambda\} \le 2e^{-\theta\lambda} Ee^{\theta S_n} \\ \le& 2e^{-\theta\lambda} e^{\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2} = 2e^{-\frac{1}{2}\lambda^2/\sigma^2}. \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

由 Itô 公式，对充分光滑的函数 $F = F(x,t) : \mathcal{R}^k \times \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}$ 有

$$\begin{aligned} F(B_t,t) - F(B_s,s) =& \int_s^t \langle \nabla_x F(B_u,u), dB_u\rangle \\ &+ \int_s^t \Big(\frac{1}{2}\triangle_{xx} F(B_u,u) + F_t(B_u,u)\Big)\, du, \end{aligned}$$

((1.1.6))

其中 $\nabla_x F(x,t)$ 表示 $F(x,t)$ 关于 x 的偏导数向量 $(\partial F(x,t)/\partial x_1,\cdots,$ $\partial F(x,t)/\partial x_k)$, 而 $\triangle_{xx} = \sum_{i,j=1}^k \partial^2/\partial x_i\partial x_j$, $F_t(x,t) = \partial F(x,t)/\partial t$.

令 $(P_t)_{t\geq 0}$ 为与 B 相关的 Markov 半群, 从而对光滑函数 $g:\mathcal{R}^k\to\mathcal{R}$ 有

$$
\begin{aligned}
(P_tg)(x) =& E^x g(B_t) \\
=& (2\pi t)^{-k/2}\int_{\mathcal{R}^k} g(y)e^{-\frac{1}{2}\|x-y\|^2/t}\,dy,
\end{aligned}
$$

其中 E^x 表示关于在零时刻从 $x\in\mathcal{R}^k$ 出发的 Wiener 过程 B 的期望. 令 $\widehat{f}:\mathcal{R}^k\to\mathcal{R}$ 满足引理中对 f 的可导要求, 并假设 $|\widehat{f}(x)-\widehat{f}(y)|\leq\sigma\|x-y\|$. 取 $F(x,t)=(P_{1-t}\widehat{f})(x)$, 由引理中的条件可知 F 是充分光滑的, 使得 (1.1.6) 成立. 令 $t=1,s=0$, 通过一些必要的计算得

$$
\widehat{f}(B_1)-E\widehat{f}(B_1)=\int_0^1\langle\nabla_x(P_{1-u}\widehat{f}\,)(B_u),dB_u\rangle.
$$

由 $|\widehat{f}(x)-\widehat{f}(y)|\leq\sigma\|x-y\|$ 易知 $P_{1-u}\widehat{f}$ 满足同样的不等式, 从而 $\|\nabla_x P_{1-u}\widehat{f}\|\leq\sigma$ a.s. 然后由 (1.1.5) 易得

$$
P\{|\widehat{f}(B_1)-E\widehat{f}(B_1)|>\lambda\}\leq 2e^{-\frac{1}{2}\lambda^2/\sigma^2}. \tag{1.1.7}
$$

最后注意到 $f(X)\overset{L}{=}f(V_D^{\frac{1}{2}}B_1)$, 其中 $V_D^{\frac{1}{2}}$ 满足 $V_D=V_D^{\frac{1}{2}}(V_D^{\frac{1}{2}})'$. 令 $\widehat{f}=f(V_D^{\frac{1}{2}}x)$, 则函数 $\widehat{f}$ 满足所需条件, 由 (1.1.7) 即得 (1.1.3).

定理 1.1.1 的证明

如果函数 sup(·) 是充分光滑的, 则定理 1.1.1 由引理 1.1.1 即得. 但是, 众所周知, 函数 sup(·) 在对角线上不可导. 然而幸运的是, sup(·) 可由光滑函数逼近. 由标准的函数逼近方法即可完成证明.

显然由 (1.1.2) 有

$$
\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{-2}\log P\{\sup_{t\in T}X_t>\lambda\}=-(2\sigma^2)^{-1}.
$$

有许多比这个不等式更精细的不等式. 在 $T=[0,h]$ 的情形, 下述结论是最佳的.

定理 1.1.2 令 X 为 $\mathcal{R}$ 上的零均值可分 Gauss 过程，其方差为 1, 协方差函数 $\Gamma(s,t)$ 满足

$$\Gamma(s,t) = 1 - C_0|s-t|^\alpha + o\big(|s-t|^\alpha\big) \quad \text{当}|s-t| \to 0\text{时},$$

其中 $0 < \alpha \le 2$, $C_0 > 0$. 则对任何 $h > 0$ 和 $\theta > 0$ 有

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{P\{\max_{t\in[0,h]} X(t) > \lambda\}}{\lambda^{2/\alpha}\Psi(\lambda)} = hC_0^{1/\alpha} H_\alpha,$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{P\{\max_{0\le j\le[h\lambda^{2/\alpha}/\theta]} X(j\theta\lambda^{-2/\alpha}) > \lambda\}}{\lambda^{2/\alpha}\Psi(\lambda)} = hC_0^{1/\alpha} \frac{H_\alpha(\theta)}{\theta},$$

其中 $H_\alpha(\theta)$ 是只依赖于 θ 和 α 的正常数，满足 $\lim_{\theta\to 0} H_\alpha(\theta)/\theta = H_\alpha$, $0 < H_\alpha := \lim_{T\to\infty} T^{-1}\int_0^\infty e^s P\big\{\sup_{0\le t\le T} Y(t) > s\big\}\, ds < \infty$, $Y(t)$ 是一个非平稳 Gauss 过程，具有均值 $EY(t) = -|t|^\alpha$ 和协方差函数 $Cov(Y(s), Y(t)) = -|t-s|^\alpha + |s|^\alpha + |t|^\alpha$.

这一结果由 Pickands (1969a,b) 得到，详细而完整的证明可在 Leadbetter, Lindgrenn 和 Rootzén (1983) 中找到，这里不再列出. 这一结果在 $\mathcal{R}^k$ 中的推广，可参看 Qualls 和 Watanabe(1973). 我们知道 $H_1 = 1$ 和 $H_2 = 1/\sqrt{\pi}$, 除了这两特殊情形，人们还不知道 H_α 的精确值. 然而 Shao (1996a) 给出了 H_α 的上下界估计和两个统计估计:

$$5.2^{-1/\alpha}0.625 \le H_\alpha \le (\alpha e/\sqrt{\pi})^{2/\alpha}, \quad \text{若 } 1 \le \alpha \le 2;$$

$$\begin{aligned}(\alpha/4)^{1/\alpha}\big(1 - e^{-1/\alpha}(1+1/\alpha)\big) &\le H_\alpha \\ &\le \big(\sqrt{\alpha}(0.77\sqrt{\alpha} + 2.41(8.8 - \alpha\log(0.4 + 2.5/\alpha))^{1/2})\big)^{2/\alpha}, \\ &\qquad \text{若 } 0 < \alpha < 1.\end{aligned}$$

特别地，我们有

$$0.12 \le H_\alpha \le 3.1, \qquad \text{若 } 1 \le \alpha \le 2,$$

$$\lim_{\alpha\to 0} \alpha \log H_\alpha / \log \alpha = 1.$$

1.1.2 Fernique 不等式

现在，我们考察 $T = [0,1]^k$ 的情形，并设 X 为零均值可分 Gauss 过程，具有协方差函数 Γ. 对任何 $(s,t) \in T \times T$, 令 $d(s,t) = |s-t| = \sup_{1 \le i \le k} |s_i - t_i|$. 记 $\varphi : [0,1] \to \mathcal{R}_+$ 为一个实函数

$$\begin{aligned}\varphi(h) &= \sup_{\substack{(s,t)\in T\times T \\ |s-t|\le h}} \sqrt{E(X(s)-X(t))^2} \\ &= \sup_{\substack{(s,t)\in T\times T \\ |s-t|\le h}} \sqrt{\Gamma(s,s) - 2\Gamma(s,t) + \Gamma(t,t)}. \qquad (1.1.8)\end{aligned}$$

定理 1.1.3 假设 $\int_1^\infty \varphi(e^{-x^2})\, dx < \infty$, 并设对某个 A, $EX^2(t) \le A^2$ 对任何 $t \in T$ 成立. 则对 $x \ge \sqrt{1 + 4k \log p}$ 我们有

$$\begin{aligned}P\left\{\sup_{t\in T} |X(t)| \ge x\left\{A + (2+\sqrt{2}) \int_1^\infty \varphi(\frac{1}{2}p^{-u^2})du\right\}\right\} \\ \le \frac{5}{2}p^{2k} \int_x^\infty e^{-u^2/2}du, \qquad (1.1.9)\end{aligned}$$

其中 $p \ge 2$ 为整数.

证明 为了叙述简单，对任何定义在 $S = T$ 或 $T \times T$ 上的 f, 我们定义范数：$\|f\| = \sup_{s\in S} |f(s)|$. 对整数 $m > 0$, 令 $I_m = \{i = (i_j); 1 \le j \le k, 0 \le i_j < m\}$, 对任何 $i \in I_m$ 定义

$$\begin{aligned}A_i^m &= \{x \in [0,1)^k : \forall j \in [1,k], i_j \le mx_j < i_j + 1\}, \\ a_i^m &= \left(\frac{2i_j+1}{2m}, 1 \le j \le k\right).\end{aligned}$$

对每一个 m, 定义 X 在 $[0,1)^k$ 上的一个 (惟一的) 逼近 X_m：

$$\forall i \in I_m, \quad \forall x \in A_i^m, \quad X_m(x) = X(a_i^m).$$

则 $\|X_m\|$ 为 m^k 个方差不超过 A 的零均值 Guass 变量的绝对值的最大值，从而

$$\forall y \in \mathcal{R}_+, \quad P\{\|X_m\| \geq yA\} \leq m^k \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_y^\infty e^{-u^2/2}\, du. \qquad (1.1.10)$$

给定整数 m_1，取整数 $m_2 > m_1$ 使得 m_2/m_1 仍然是整数. 则 $\{A_i^{m_2} : i \in I_{m_2}\}$ 是 $\{A_i^{m_1} : i \in I_{m_1}\}$ 的一个分划，且 $\|X_{m_1} - X_{m_2}\|$ 是 m_2^k 个方差不超过 $\varphi\left(\frac{1}{2m_1}\right)$ 的零均值 Gauss 变量的绝对值的最大值. 因此 $\forall y \in \mathcal{R}_+$,

$$\begin{aligned} &P\left\{\|X_{m_1} - X_{m_2}\| \geq y\varphi\left(\frac{1}{2m_1}\right)\right\} \\ \leq &m_2^k \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_y^\infty e^{-u^2/2}\, du. \end{aligned} \qquad (1.1.11)$$

假设 $\{y_n; n \geq 0\}$ 是一列正实数， $\{m_n; n \geq 1\}$ 是一列正整数，使得对每个 n, m_{n+1}/m_n 是整数. 由 (1.1.10) 和 (1.1.11) 得

$$\begin{aligned} &P\Big\{\|X_{m_1}\| + \sum_{n=1}^\infty \|X_{m_n} - X_{m_{n+1}}\| \geq y_0 A + \sum_{n=1}^\infty y_n \varphi\Big(\frac{1}{2m_n}\Big)\Big\} \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=0}^\infty (m_{n+1})^k \int_{y_n}^\infty e^{-u^2/2}\, du. \end{aligned} \qquad (1.1.12)$$

令 $A = \bigcup_n \{a_i^{m_n} : i \in I_{m_n}\}$, 则 A 是 $[0,1]^k$ 中的可数稠密子集. 由于 X 可分， $\|X\|$ 与 $\sup_{t\in A} |X(t)|$ 几乎处处相等，而后者不超过 $\|X_{m_1}\| + \sum_{n=1}^\infty \|X_{m_n} - X_{m_{n+1}}\|$. 因而

$$\begin{aligned} &P\left\{\|X\| \geq y_0 A + \sum_{n=1}^\infty y_n \varphi\left(\frac{1}{2m_n}\right)\right\} \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=0}^\infty (m_{n+1})^k \int_{y_n}^\infty e^{-u^2/2}\, du. \end{aligned} \qquad (1.1.13)$$

对整数 $p \geq 2$, 令

$$m_n = p^{2^n}, \ y_n = x2^{n/2}, \ x \geq \sqrt{1 + 4k\log p}, \ x_n = 2^{n/2}, \forall n \geq 0.$$

则对任何 $n \geq 1$ 有

$$y_n \varphi\left(\frac{1}{2m_n}\right) \leq x(2+\sqrt{2})(x_n - x_{n-1})\varphi\left(\frac{1}{2}p^{-x_n^2}\right)$$
$$\leq x(2+\sqrt{2})\int_{x_{n-1}}^{x_n} \varphi\left(\frac{1}{2}p^{-u^2}\right) du,$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \varphi\left(\frac{1}{2m_n}\right) \leq x(2+\sqrt{2})\int_1^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{2}p^{-u^2}\right) du.$$

另一方面，对任何 $n \geq 0$ 有

$$(m_{n+1})^k \int_{y_n}^{\infty} e^{-u^2/2}\, du$$
$$= \int_x^{\infty} \exp\left\{k2^{n+1}\log p + \frac{n}{2}\log 2 - \frac{v^2}{2}2^n\right\} dv$$
$$\leq \int_x^{\infty} \exp\left\{-\frac{v^2}{2} + 2k\log p + \frac{1}{2}(n\log 2 + 1 - 2^n)\right\} dv,$$

由此得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(m_{n+1})^k \int_{y_n}^{\infty} e^{-u^2/2}\, du$$
$$\leq p^{2k}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2}e^{-\frac{2^n-1}{2}} \int_x^{\infty} e^{-u^2/2}\, du \leq \frac{5}{2}p^{2k}\int_x^{\infty} e^{-u^2/2}\, du.$$

定理得证.

推论 1.1.1 设 X 为 $T=[a,b]^k$ 上的零均值可分 Gauss 过程，具有协方差函数 Γ，并且 $EX^2(t) \leq A$ 对任何 $t \in T$ 成立. 令 $\varphi(h)$ 为 (1.1.8) 所定义. 则对任何 $x \geq \sqrt{1+4k\log p}$ 我们有

$$P\left\{\sup_{t\in T}|X(t)| \geq x\left(A + (2+\sqrt{2})\int_1^{\infty}\varphi\left(\frac{b-a}{2}p^{-u^2}\right) du\right)\right\}$$
$$\leq \frac{5}{2}p^{2k}\int_x^{\infty} e^{-u^2/2}\, du,$$

其中 $p \geq 2$ 为整数.

注 1.1.1 设 X 为 $T=[a,b]^k$ 上的可分过程. 假设存在 $T\times T$ 上的一个函数 $d(\cdot,\cdot)$ 和常数 $C_0,\gamma,\beta>0$ 使得

$$P\Big\{|X(s)-X(t)| \geq xd(s,t)\Big\} \leq C_0 \exp\big(-\gamma d^{\beta}(s,t)\big), \quad \forall x \geq 0. \tag{1.1.14}$$

定义函数 $\varphi: T \to \mathcal{R}^+$ 为

$$\varphi(h) = \sup_{\substack{s,t\in T\\ |s-t|\leq h}} d(s,t).$$

由定理 1.1.3 的证明, 对任何 $x \geq \big((1+4k\log p)/\gamma\big)^{1/\beta}$ 有

$$P\left\{\sup_{t\in T}|X(t)| \geq x\left(\sup_{(s,t)\in T\times T} d(s,t) + (1-2^{-1/\beta})^{-1}\right.\right.$$
$$\left.\left.\int_1^\infty \varphi\Big(\frac{b-a}{2}p^{-u^2}\Big)\,du\right)\right\} \leq C_0\frac{5}{2}p^{2k}\exp(-\gamma x^{\beta}),$$

其中 $p \geq 2$ 为整数.

§1.2 比较原理

这一节, 我们介绍 Gauss 过程的比较原理, 它们和尾概率估计是研究 Gauss 过程理论的非常重要而又有效的工具. 首先我们介绍著名的 Slepian 引理. Gauss 过程理论中的许多重要的基本结果都是通过 Slepian 引理证明的.

1.2.1 Slepian 不等式

有许多叙述 Slepian 型不等式的方式. 我们采用如下 Kahane (1986) 的公式, 它包涵了许多有兴趣的结果.

定理 1.2.1 设 $X=(X_1,\cdots,X_N)$ 和 $Y=(Y_1,\cdots,Y_N)$ 为 $\mathcal{R}^N$ 中的零均值 Gauss 向量. 假设

$$EX_iX_j \leq EY_iY_j \qquad 若 (i,j)\in A,$$

$$EX_iX_j \geq EY_iY_j \qquad 若(i,j) \in B,$$
$$EX_iX_j = EY_iY_j \qquad 若(i,j) \notin A \cup B,$$

其中 A 和 B 为 $\{1,\cdots,N\} \times \{1,\cdots,N\}$ 的子集. 若 h 为 $\mathcal{R}^N$ 上的函数, 其在分布意义下的二阶导数满足

$$D_{ij}h \geq 0 \qquad 若(i,j) \in A,$$
$$D_{ij}h \leq 0 \qquad 若(i,j) \in B,$$

其中 $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $D_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, 则

$$Eh(X) \leq Eh(Y).$$

证明 我们不妨设 X 与 Y 独立. 对每个 $t \in [0,1]$, 令 $Z(t) = (1-t)^{1/2}X + t^{1/2}Y$ 和 $\psi(t) = Eh(Z(t))$. 我们要证 $\psi(0) \leq \psi(1)$, 这只要证 $\psi'(t) \geq 0$ 对任何 $t \in [0,1]$ 成立. 我们有

$$\psi'(t) = \sum_{i=1}^{N} E\{D_i h(Z(t)) Z_i'(t)\}.$$

对固定的 t 和 i, 易知对每个 j 有

$$EZ_j(t)Z_i'(t) = E(Y_jY_i - X_jX_i)/2.$$

由定理中的假设我们可将 Z_j 表示为

$$Z_j(t) = \alpha_j Z_i'(t) + W_j,$$

其中 $(W_1,\cdots,W_N)$ 为一个与 X 和 Y 都独立的新的零均值 Gauss 向量序列, 并且当 $(i,j) \in A$ 时 $\alpha_j \geq 0$, 当 $(i,j) \in B$ 时 $\alpha_j \leq 0$, 当 $(i,j) \notin A \cup B$ 时 $\alpha_j = 0$. 如果我们把 $E\{D_i h(Z(t)) Z_i'(t)\}$ 看作是 α_j ($(i,j) \in A \cup B$) 的函数, 对它求关于 α_j 的偏导数并注意到关于 h 的假设条件我们知, 这些偏导数值当 $(i,j) \in A$ 时是正的, 而当 $(i,j) \in B$ 时是负的. 这意味着 $E\{D_i h(Z(t)) Z_i'(t)\}$ 对满

足 $(i,j)\in A$ 的 α_j 是单调增加的，而对满足 $(i,j)\in B$ 的 α_j 是单调减少的. 另一方面，当所有 α_j 为 0 时，这一函数取值为 0, 这是因为

$$\begin{aligned}E\{D_i h(Z(t))Z_i'(t)\} &= E\{D_i h(W)Z_i'(t)\} \\ &= E\{D_i h(W)\}E\{Z_i'(t)\} = 0.\end{aligned}$$

因此，$E\{D_i h(Z(t))Z_i'(t)\}\geq 0$. 从而 $\psi'(t)\geq 0$, 即我们要证的.

由此定理立即可得下述 Slepian 不等式，这只要在定理中取 $A=\{(i,j),i\neq j\}$, $B=\emptyset$ 和 $h=I_G$, 其中 G 为区间 $(-\infty,\lambda_j]$ 的乘积.

推论 1.2.1 (Slepian 不等式) 设 X 和 Y 为 $\mathcal{R}^N$ 中的零均值 Gauss 向量，满足 $EX_i^2=EY_i^2$ $(\forall i)$ 且

$$EX_iX_j\leq EY_iY_j \quad \forall i\neq j.$$

则对任何实数 λ_i 和 $i\leq N$ 有

$$P\Big\{\bigcup_{i=1}^{N}(Y_i>\lambda_i)\Big\}\leq P\Big\{\bigcup_{i=1}^{N}(X_i>\lambda_i)\Big\}.$$

特别地，由分部积分法我们有

$$E\max_{i\leq N}Y_i\leq E\max_{i\leq N}X_i.$$

下述 Gordon 的结果是 Slepian 不等式的一个有趣的推广.

推论 1.2.2 设 $X=(X_{ij})$ 和 $Y=(Y_{ij})$, $1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m$ 为零均值 Gauss 向量，满足

$$\begin{aligned}EX_{ij}^2 &= EY_{ij}^2 \quad \forall i,j;\\ EX_{ij}X_{ik} &\leq EY_{ij}Y_{ik} \quad \forall i,j,k;\\ EX_{ij}X_{lk} &\geq EY_{ij}Y_{lk} \quad \forall i\neq l \text{ 和} j,k.\end{aligned}$$

则对任何实数 λ_{ij} 有

$$P\Big\{\bigcap_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}(Y_{ij}>\lambda_{ij})\Big\}\le P\Big\{\bigcap_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}(X_{ij}>\lambda_{ij})\Big\}.$$

这蕴涵了对任何 $\mathcal{R}$ 上的单调增加函数 g 有

$$E\Big\{\min_{i\le n}\max_{j\le m}g(Y_{ij})\Big\}\le E\Big\{\min_{i\le n}\max_{j\le m}g(X_{ij})\Big\},$$

和对任何实数 λ 有

$$P\Big\{\min_{i\le n}\max_{j\le m}Y_{ij}\ge\lambda\Big\}\le P\Big\{\min_{i\le n}\max_{j\le m}X_{ij}\ge\lambda\Big\}.$$

证明 令 $N=mn$. 对 $I\in\{1,\cdots,N\}$, 设 $i=i(I)$, $j=j(I)$ 为惟一的 $1\le i\le n$, $1\le j\le m$ 使得 $I=m(i-1)+j$. 考察 $\mathcal{R}^N$ 上如下形式的 Gauss 向量 X 和 Y : $X_I=X_{i(I),j(I)}$, $Y_I=Y_{i(I),j(I)}$. 令

$$A=\{(I,J):i(I)=i(J)\},\quad B=\{(I,J):i(I)\ne i(J)\}.$$

则定理 1.2.1 中第一组条件满足. 令 h 为下述集合的示性函数

$$\bigcup_{i=1}^{n}\bigcap_{I:i(I)=i}\{x\in\mathcal{R}^N;X_I>\lambda_{i,j(I)}\}.$$

通过取余集, 由定理 1.2.1 即得证推论.

Slepian 不等式不能用于 $\sup_{t\in T}|X_t|$. 为了说明这一点, 我们取 $T=\{1,2\}$, X_1 和 X_2 为标准的正态变量, 它们的相关系数为 ρ. 记 $P_\rho(\lambda)$ 为 $\max(X_1,X_2)>\lambda$ 的概率, Ψ 为标准正态分布的尾概率, 易知

$$\begin{aligned}P_{-1}(\lambda)=&P_{-1}\{X_1\vee X_2>\lambda\}=P\{|X|>\lambda\}=2\Psi(\lambda),\\ P_0(\lambda)&=2\Psi(\lambda)-\Psi^2(\lambda),\\ P_1(\lambda)=&P_1\{X_1\vee X_2>\lambda\}=\{X>\lambda\}=\Psi(\lambda).\end{aligned}$$

从而正如 Slepian 不等式所示，我们有 $P_{-1}(\lambda) \geq P_0(\lambda) \geq P_1(\lambda)$. 但是如果记 $\widehat{\mathrm{P}}_\rho(\lambda)$ 为 $\max(|X_1|,|X_2|) > \lambda$ 的概率，则 $\widehat{P}_{-1}(\lambda) = \widehat{P}_1(\lambda) = 2\Psi(\lambda)$, $\widehat{P}_0(\lambda) = 4\{\Psi(\lambda) - \Psi^2(\lambda)\}$, 从而对任何 $\lambda > 0$ 有

$$\widehat{P}_{-1}(\lambda) \leq \widehat{P}_0(\lambda), \quad \widehat{P}_0(\lambda) \geq \widehat{P}_1(\lambda),$$

因此 Slepian 引理中所要求的单调性不满足.

能够应用于 $\sup_{t\in T}|X(t)|$ 的一个不等式是 Anderson 不等式.

1.2.2 Anderson 不等式

定理 1.2.2 设 E 为 $\mathcal{R}^N$ 中的凸集，且关于原点对称. 设 $f(x) \geq 0$ 为一函数，满足

(i) $f(x) = f(-x)$,

(ii) 对每个 u $(0 < u < \infty)$, $K_u := \{x : f(x) \geq u\}$ 是凸集,

(iii) $\int_E f(x)\,dx < \infty$ (在 Lebesgue 积分意义下).

则对任何 $0 \leq h \leq 1$ 成立

$$\int_E f(x+hy)\,dx \geq \int_E f(x+y)\,dx.$$

证明这个定理之前，我们先给出一些推论.

推论 1.2.3 设 X 为 $\mathcal{R}^N$ 中的一零均值 Gauss 向量， E 为 $\mathcal{R}^N$ 中一个关于原点对称的凸集， $x \in \mathcal{R}^N$. 则对任何 $0 \leq |h| \leq 1$ 成立

$$P\{X + x \in E\} \leq P\{X + hx \in E\}.$$

证明 因为由对称性有 $P\{X - hx \in E\} = P\{-X + hx \in -E\} = P\{X + hx \in E\}$, 我们可设 $h \geq 0$. 令 $f(x) = (2\pi)^{-N/2} \exp\{-\frac{1}{2}x'\Sigma^{-1}x\}$ 为 X 的密度函数，其中 Σ 为正定矩阵. 由定理 1.2.2, 结论得证.

注 1.2.1 推论 1.2.3 也可由 (1.0.2) 得到. 为了说明这一点, 我们只需考察 X 的分布为 γ_N 的情形. 这时在 (1.0.2) 中取 $A = E+x$, $B = E - x$ 和 $\lambda = (h+1)/2$, 得

$$\begin{aligned}\mathrm{inv}\Phi\big(\gamma_N(E-hx)\big) &\geq \mathrm{inv}\Phi\big(\gamma_N(\lambda A+(1-\lambda)B)\big)\\ &\geq \lambda\mathrm{inv}\Phi\big(\gamma_N(E+x)\big)+(1-\lambda)\mathrm{inv}\Phi\big(\gamma_N(E-x)\big).\end{aligned}$$

由对称性，我们有

$$\mathrm{inv}\Phi\big(\gamma_N(E-hx)\big) \geq \mathrm{inv}\Phi\big(\gamma_N(E-x)\big),$$

由此得 $\gamma_N(E-hx)\geq\gamma_N(E-x)$，这就是所要证的.

推论 1.2.4 设 X_1 和 X_2 为 $\mathcal{R}^N$ 中两个均值为零的 Gauss 向量，其协方差矩阵分别为 Σ_1 和 Σ_2. 若 $\Sigma_2-\Sigma_1$ 是半正定的，E 为一个关于原点对称的凸集，则

$$P\{X_1\in E\}\geq P\{X_2\in E\}.$$

证明 令 Y 为 $\mathcal{R}^N$ 中与 X_1 独立的零均值 Gauss 向量，其协方差矩阵为 $\Sigma_2-\Sigma_1$. 则 X_2 与 X_1+Y 同分布. 由推论 1.2.3, 我们有

$$\begin{aligned}P\{X_2\in E\}=&P\{X_1+Y\in E\}=\int P\{X_1+y\in E\}\,dP_Y(y)\\ &\leq\int P\{X_1\in E\}\,dP_Y(y)=P\{X_1\in E\}.\end{aligned}$$

由推论 1.2.4 我们立即可得下述结果.

推论 1.2.5 设 $\{X_i(t);0\leq t\leq T\}$ (i=1,2) 为一零均值 Gauss 过程，其协方差矩阵为 $\Gamma_i(t,s)$. 假设 $\Gamma_2(t,s)-\Gamma_1(t,s)$ 为正定函数. 则

$$P\left\{\int_0^T X_1^2(t)\,dt\leq x\right\}\geq P\left\{\int_0^T X_2^2(t)\,dt\leq x\right\}.$$

若 $X_i(t)$ 为可分过程，则

$$P\Big\{\sup_{0\leq t\leq T}|X_1(t)|\leq x\Big\}\geq P\Big\{\sup_{0\leq t\leq T}|X_2(t)|\leq x\Big\}.$$

现在我们来证明定理 1.2.2.

定理 1.2.2 的证明 等价地我们只要证

$$\int_{E+hy} f(x)\,dx \geq \int_{E+y} f(x)dx.$$

我们先证明对任何 u 有

$$\mathrm{vol}\{(E+hy)\cap K_u\} \geq \mathrm{vol}\{(E+y)\cap K_u\},$$

其中 $\mathrm{vol}\{\cdot\}$ 表示集合的体积. 令 $\alpha=(h+1)/2$, 则 $\alpha y+(1-\alpha)(-y)=hy$. 从而由 K_u 的凸性和 $E+hy\supset\alpha(E+y)+(1-\alpha)(E-y)=\{\alpha E+(1-\alpha)E\}+hy$ 我们有 $(E+hy)\cap K_u\supset\alpha\{(E+y)\cap K_u\}+(1-\alpha)\{(E-y)\cap K_u\}$. 因此

$$\mathrm{vol}\{(E+hy)\cap K_u\}\geq\mathrm{vol}\big\{\alpha\{(E+y)\cap K_u\}+(1-\alpha)\{(E-y)\cap K_u\}\big\}.$$

由于 $(E+y)\cap K_u$ 和 $(E-y)\cap K_u$ 关于原点对称, 从而它们的体积相等. Brunn-Minkowski 定理 (参见 Bonnsen 和 Fenchel 1948) 告诉我们 $\mathrm{vol}^{1/N}\{(1-\theta)E_0+\theta E_1\}\geq(1-\theta)\mathrm{vol}^{1/N}(E_0)+\theta\,\mathrm{vol}^{1/N}(E_1)$ (其中 E_0 和 E_1 为非空集合, $0\leq\theta\leq1$). 因此

$$\mathrm{vol}\big\{\alpha\{(E+y)\cap K_u\}+(1-\alpha)\{(E-y)\cap K_u\}\big\}\geq\mathrm{vol}\{(E+y)\cap K_u\},$$

从而

$$H(u):=vol\{(E+hy)\cap K_u\}\geq vol\{(E+y)\cap K_u\}:=H^*(u).$$

由 Lebesgue 积分和 Lebesgue-Stielties 积分的定义得

$$\begin{aligned}\int_{E+hy} f(x)dx-\int_{E+y} f(x)dx &= -\int_0^\infty u\,dH(u)+\int_0^\infty udH^*(u)\\ &=\int_0^\infty ud\{H^*(u)-H(u)\}.\end{aligned}$$

由分部积分法, 对任何 $b>a\geq0$ 有

$$\begin{aligned}\int_a^b ud\{H^*(u)-H(u)\} &= b\{H^*(b)-H(b)\}-a\{H^*(a)-H(a)\}\\ &\quad+\int_a^b\{H(u)-H^*(u)\}\,du\geq b\{H^*(b)-H(b)\}.\end{aligned}$$

因为 $f(x)$ 在 E 上的积分有限，所以当 $b\to\infty$ 时，$bH(b)\to 0$ 且 $bH^*(b)\to 0$. 因而 $\int_0^\infty ud\{H^*(u)-H(u)\}\ge 0$, 结论得证.

利用 Anderson 不等式 (推论 1.2.3), 可得 Marcus (1968) 的下述关于 $\max_i |X_i|$ 的不等式.

定理 1.2.3 设 $X=(X_1,\cdots,X_N)$ 为 $\mathcal{R}^N$ 上的零均值 Gauss 向量，具有正定的协方差矩阵 Σ. 记 Σ_i 为 Σ 的第 i 个主子行列式. 定义 $\rho_i=\Sigma_{i-1}/\Sigma_i$, $i=1,\cdots,N$, $\Sigma_0=1$. 则

$$P\Big\{\max_{1\le i\le N}|X_i|\le a\Big\}\le\prod_{i=1}^N\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{a(\rho_i)^{1/2}}e^{-t^2/2}\,dt.$$

证明 令 $A=\Sigma^{-1}$, $A=P'P$, 其中 $P=(P_{ij})$ 为对称正定矩阵. 令 $Y_i=\sum_j P_{ij}X_j$. 则 $Y_1,\cdots,Y_N$ 为独立的标准正态变量，且 Y_i 具有下述形式:

$$Y_i=(\rho_i)^{1/2}X_i+f_i(Y_{i-1},\cdots,Y_1),\quad i=1,\cdots,N.$$

则由推论 1.2.3, 有

$$\begin{aligned}
&P\Big\{\max_{1\le i\le N}|X_i|\le a\Big\}\\
=&P\Big\{\bigcap_{i=1}^N(|Y_i-f_i(Y_{i-1},\cdots,Y_1)|\le a(\rho_i)^{1/2})\Big\}\\
=&E\Big(I\Big\{\bigcap_{i=1}^{N-1}\{|Y_i-f_i(Y_{i-1},\cdots,Y_1)|\le a(\rho_i)^{1/2}\}\Big\}\\
&\cdot P\{|Y_N-f_N(Y_{N-1},\cdots,Y_1)|\le a(\rho_N)^{1/2}|Y_{N-1},\cdots,Y_1\}\Big)\\
\le&E\Big(I\Big\{\bigcap_{i=1}^{N-1}\{|Y_i-f_i(Y_{i-1},\cdots,Y_1)|\le a(\rho_i)^{1/2}\}\Big\}\\
&\cdot P\{|Y_N|\le a(\rho_N)^{1/2}\}\Big)\\
\le&\cdots\le\prod_{i=1}^N P\{|Y_i|\le a(\rho_i)^{1/2}\}=\prod_{i=1}^N\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{a(\rho_i)^{1/2}}e^{-t^2/2}\,dt.
\end{aligned}$$

推论 1.2.6 设 $X(t)$ 为一实值平稳 Gauss 过程, 对某个 $\delta > 0$, 其协方差函数 $\gamma(h) = EX(t)X(t+h)$ 为 $[0,\delta]$ 上的凸函数. 设 $t_0 < t_1 < \cdots < t_N, t_N - t_0 \le \delta$. 则

$$P\Big\{\max_{1\le i\le N}|\xi_i| \le a\Big\} \le \prod_{i=1}^{N}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{2}a/\alpha_{ii}} e^{t^2/2}\,dt,$$

其中 ξ_i 或者都为 $X(t_i) - X(t_{i-1})$, 或者都为 $X(t_i) - X(t_0)$, $\alpha_{ii} = \sigma(t_i - t_{i-1})$, $i = 1,\cdots,N$, $\sigma^2(t) = E(X(t) - X(0))^2$.

证明 令 $\xi_i = X(t_i) - X(t_{i-1})$, $i = 1,\cdots,N$. 设 $A = (a_{ij}) = (E\xi_i\xi_j)$ 为 $(\xi_1,\cdots,\xi_N)$ 的协方差矩阵. 由 $\gamma(h)$ 的凸性, 对 $i \ne j$ 有 $a_{ij} \le 0$. 对每个 i, 记 Σ_i 为 A 的第 i 个主子行列式, 记

$$S_u^i = \sum_{\substack{v=1\\ v\ne u}}^{i}|a_{uv}| = a_{uu} - \sum_{v=1}^{i}a_{uv} := \sigma_u^i a_{uu}, \quad 1 \le u \le i,$$

和

$$t_i^i = \max_{1\le k\le i-1}\sigma_k^i.$$

由 $\gamma(h)$ 的凸性易知

$$S_u^n = a_{uu} - E\big(X(t_u) - X(t_0)\big)\big(X(t_u) - X(t_{u-1})\big) < a_{uu}, \quad 1 \le u < n,$$

和

$$\begin{aligned} S_i^i &= \gamma(0) - \gamma(t_i - t_{i-1}) + \gamma(t_i - t_0) - \gamma(t_{i-1} - t_0) \\ &\le \gamma(0) - \gamma(t_i - t_{i-1}) = \frac{1}{2}a_{ii}. \end{aligned}$$

由此我们知矩阵 A 的对角线元素都为正, 并且每一行上的非对角线元素的绝对值之和不超过这一行上的对角线元素值, 从而 A 是正定的. 同样我们有

$$(a_{ii} + t_i^i S_i^i)\Sigma_{i-1} \ge \Sigma_i \ge (a_{ii} - t_i^i S_i^i)\Sigma_{i-1}.$$

因为 $S_k^i \le S_k^n \le a_{kk}$, 我们知 $0 \le t_i^i \le 1$. 从而

$$\frac{\Sigma_{i-1}}{\Sigma_i} \le \frac{2}{a_{ii}} = \frac{2}{\sigma^2(t_i - t_{i-1})}.$$

最后注意到由 $X(t_j) - X(t_{j-1})$, $j = 1, \cdots, i$ 的协方差矩阵得到的函数 Σ_{i-1}/Σ_i 与由 $X(t_j) - X(t_0)$, $j = 1, \cdots, i$ 的协方差矩阵得到的函数 Σ_{i-1}/Σ_i 相同, 即得证结论.

1.2.3 Khatri-Šidák 不等式

设 $X = (X_1, \cdots, X_N)$ 为零均值 Gauss 向量满足 $EX_iX_j \le 0$ $(i \ne j)$. Slepian 不等式 (推论 1.2.1) 告诉我们, 对任何实数 λ_i, $i \le N$ 成立

$$P\left\{\bigcap_{i=1}^{N}(X_i \le \lambda_i)\right\} \le \prod_{i=1}^{N} P\{X_i \le \lambda_i\}.$$

但是, Slepian 的证明不能推广到带绝对值的情形. 下述定理是 Slepian 不等式在带绝对值的情形时的一个类比.

定理 1.2.4 设 $(X_1, \cdots, X_N)$ 为 $\mathcal{R}^N$ 上的零均值 Gauss 向量, 则对任意的正数 λ_i, $i \le N$ 我们有

$$\begin{aligned} P\left\{\bigcap_{i=1}^{N}(|X_i| \le \lambda_i)\right\} &\ge P\left\{\bigcap_{i=1}^{N-1}(|X_i| \le \lambda_i)\right\} P\{|X_N| \le \lambda_N\} \\ &\ge \prod_{i=1}^{N} P\{|X_i| \le \lambda_i\}. \end{aligned}$$

我们可以把定理 1.2.4 改写成如下形式.

定理 1.2.4′ 设 $\{X(t); t \in T\}$ 为一零均值可分 Gauss 过程, $\{\lambda(t); t \in T\}$ 为一正实函数. 则对任何 $t_0 \in T$ 我们有

$$\begin{aligned} P\left\{\sup_{t \in T} \frac{|X(t)|}{\lambda(t)} \le 1\right\} \ge & P\left\{\sup_{t \in T \setminus \{t_0\}} \frac{|X(t)|}{\lambda(t)} \le 1\right\} \\ & \cdot P\left\{\frac{|X(t_0)|}{\lambda(t_0)} \le 1\right\}. \end{aligned}$$

定理 1.2.4 是由 Khatri (1967) 和 Šidák (1968) 得到的，因此叫作 Khatri-Šidák 不等式. 我们这里给出 Khatri 的证明，他的证明似乎简单一些. 事实上，定理 1.2.4 是下述命题的推论.

命题 1.2.1 设 $X=(X^{(1)},X^{(2)})$ 为 $\mathcal{R}^{m+n}$ 上的零均值 Gauss 向量，其中 $X^{(1)}=(X_1^{(1)},\cdots,X_m^{(1)})$, $X^{(2)}=(X_1^{(2)},\cdots,X_n^{(2)})$ 分别为 $\mathcal{R}^m$ 和 $\mathcal{R}^n$ 上的 Gauss 向量. 设 D_1 和 D_2 分别为 $\mathcal{R}^m$ 和 $\mathcal{R}^n$ 上的关于原点对称的凸集. 如果矩阵 $\mathrm{Cov}(X^{(1)},X^{(2)}):=E(X_1^{(1)},\cdots,X_m^{(1)})'(X_1^{(2)},\cdots,X_n^{(2)})$ 的秩至多为 1, 则有

$$P\{X^{(1)}\in D_1,X^{(2)}\in D_2\}\geq P\{X^{(1)}\in D_1\}P\{X^{(2)}\in D_2\}.$$

为证命题 1.2.1, 我们需要一个引理.

引理 1.2.1 设 $g(X)$ 和 $h(X)$ 为 $\mathcal{R}^N$ 上的随机向量 X 的两个函数. 如果对 $\mathcal{R}^N$ 中的任何两点 x_1 和 x_2 有 $(g(x_1)-g(x_2))(h(x_1)-h(x_2))\geq 0$, 则有

$$Eg(X)h(X)\geq Eg(X)Eh(X),$$

反过来，如果对 $\mathcal{R}^N$ 中的任何两点 x_1 和 x_2 有 $(g(x_1)-g(x_2))(h(x_1)-h(x_2))\leq 0$, 则有

$$Eg(X)h(X)\leq Eg(X)Eh(X).$$

证明 设 Y 为 X 的独立复制. 则 $(g(X)-g(Y))(h(X)-h(Y))\geq 0$, 从而 $E(g(X)-g(Y))(h(X)-h(Y))\geq 0$, 即 $Eg(X)h(X)\geq Eg(X)Eh(X)$.

命题 1.2.1 的证明 令 Σ_1 和 Σ_2 分别为 $X^{(1)}$ 和 $X^{(2)}$ 的协方差矩阵. 由 $\mathrm{Cov}(X^{(1)},X^{(2)})$ 的秩至多为 1 的事实，我们知存在两个向量 $a=(a_1,\cdots,a_m)\in\mathcal{R}^m$ 和 $b=(b_1,\cdots,b_n)\in\mathcal{R}^n$ 使得 $\mathrm{Cov}(X^{(1)},X^{(2)})=a'b$, 并且可将 X 写成如下形式

$$X^{(1)}=Y^{(1)}+ag,\quad X^{(2)}=Y^{(2)}+bg,$$

其中 g 为一标准正态变量, $Y^{(1)}$ $(Y^{(2)})$ 为零均值 Gauss 向量, 具有协方差矩阵 $\Sigma_1 - a'a$ $(\Sigma_2 - b'b)$, 且 $Y^{(1)}, Y^{(2)}$ 和 g 相互独立. 推论 1.2.3 告诉我们, $P\{Y^{(1)} + ay \in D_1\}$ 和 $P\{Y^{(2)} + by \in D_2\}$ 都为 $|y|$ 的单调增加函数, 由引理 1.2.1 有

$$
\begin{aligned}
P\{X^{(1)} \in D_1, X^{(2)} \in D_2\} &= P\{Y^{(1)} + ag \in D_1, Y^{(2)} + bg \in D_2\} \\
&= \int P\{Y^{(1)} + ay \in D_1, Y^{(2)} + by \in D_2\}\, dP_g(y) \\
&= \int P\{Y^{(1)} + ay \in D_1\} P\{Y^{(2)} + by \in D_2\}\, dP_g(y) \\
&\geq \int P\{Y^{(1)} + ay \in D_1\}\, dP_g(y) \int P\{Y^{(2)} + by \in D_2\}\, dP_g(y) \\
&= P\{Y^{(1)} + ag \in D_1\} P\{Y^{(2)} + bg \in D_2\} \\
&= P\{X^{(1)} \in D_1\} P\{X^{(2)} \in D_2\},
\end{aligned}
$$

命题得证.

定理 1.2.4 的证明 在命题 1.2.1 中取 $X^{(1)} = (X_1, \cdots, X_{N-1})$, $X^{(2)} = X_N$, $D_1 = \bigcap_{i=1}^{N-1} \{|x_i| \leq \lambda_i\}$ 和 $D_2 = \{|x_N| \leq \lambda_N\}$, 得

$$
P\left\{\bigcap_{i=1}^{N} (|X_i| \leq \lambda_i)\right\} \geq P\left\{\bigcap_{i=1}^{N-1} (|X_i| \leq \lambda_i)\right\} P\{|X_N| \leq \lambda_N\}.
$$

由归纳法, 结论得证.

定理 1.2.5 设 $X = (X_1, \cdots, X_N)$ 为 $\mathcal{R}^N$ 中的零均值 Gauss 向量, 其协方差矩阵 Γ 满足 $a_{ij} = \alpha_i \alpha_j (a_{ii} a_{jj})^{1/2}$ $(|\alpha_i| \leq 1, i \neq j)$, 且 $a_{ii} > 0$ $\forall i$. 则对任何正数 λ_i, $i \leq N$ 有

$$
P\{|X_i| \geq \lambda_i, i = 1, \cdots, N\} \geq \prod_{i=1}^{N} P\{|X_i| \geq \lambda_i\}.
$$

证明 令 $\sigma_i^2 = a_{ii}$. 由假设, 可将协方差矩阵 Γ 写成 $\Gamma = T + \alpha'\alpha$, 其中 T 为一个 $N \times N$ 对角线矩阵, 其对角线元素为 $\sigma_i^2(1 - \alpha_i^2)$, $\alpha = (\sigma_1 \alpha_1, \cdots, \sigma_N \alpha_N)$. 可将 X 写成

$$
X = Y + \alpha g,
$$

其中 $Y=(Y_1,\cdots,Y_N)$ 是 $\mathcal{R}^N$ 上的零均值 Gauss 向量, 其协方差矩阵为 T, g 为一标准正态变量且与 Y 独立. 从而 $Y_1,\cdots,Y_N,g$ 相互独立. 注意到由推论 1.2.3 可知对每个 i, $P\{|Y_i+\sigma_i\alpha_i y|\ge\lambda_i\}$ 是 $|y|$ 的单调增加函数, 由引理 1.2.1, 得

$$P\{|X_i|\ge\lambda_i,i=1,\cdots,N\}=\int\prod_{i=1}^N P\{|Y_i+\sigma_i\alpha_i y|\ge\lambda_i\}\,dP_g(y)$$
$$\ge\prod_{i=1}^N\int P\{|Y_i+\sigma_i\alpha_i y|\ge\lambda_i\}\,dP_g(y)=\prod_{i=1}^N P\{|X_i|\ge\lambda_i\},$$

定理得证.

下面, 我们给出定理 1.2.4$'$ 的一个推广.

定理 1.2.4$''$ 设 $\{Y(t);t\in T\}=\{X_k(t);t\in T\}_{k=1}^\infty$ 为一列独立的零均值可分 Gauss 过程, $\{\lambda(t);t\in T\}$ 为一正实函数. 则对任何 $t_0\in T$ 有

$$P\left\{\sup_{t\in T}\frac{\|Y(t)\|_{l^p}}{\lambda(t)}\le 1\right\}$$
$$\ge P\left\{\sup_{t\in T\setminus\{t_0\}}\frac{\|Y(t)\|_{l^p}}{\lambda(t)}\le 1\right\}P\left\{\frac{\|Y(t_0)\|_{l^p}}{\lambda(t_0)}\le 1\right\},$$

其中 $p\ge 1$, $\|Y(t)\|_{l^p}^p=\sum_{k=1}^\infty|X_k(t)|^p$.

这一结果是下述命题的直接推论.

命题 1.2.2 设 $X=\{X_i(t);t\in T\cup\{t_0\}\}_{i=1}^N$ 为一列独立的零均值可分 Gauss 过程, D_1 为函数空间 $\mathcal{R}^{N\times T}=\{x(t)=(x_1(t),\cdots,x_N(t));t\in T\}$ 上的凸集, 在下述意义下对称, 即 $(x_1(\cdot),\cdots,x_N(\cdot))\in D_1$ 蕴涵了 $(\varepsilon_1x_1(\cdot),\cdots,\varepsilon_Nx_N(\cdot))\in D_1$ 对任何 $\varepsilon_i=\pm1,i=1\cdots,N$ 成立, D_2 为 $\mathcal{R}^N$ 中的凸集, 在下述意义下对称, 即 $(x_1,\cdots,x_N)\in D_2$ 蕴涵了 $(\varepsilon_1x_1,\cdots,\varepsilon_Nx_N)\in D_2$ 对任何

$\varepsilon_i = \pm 1, i = 1\cdots, N$ 成立. 则

$$P\big\{\{X(t);t\in T\}\in D_1, X(t_0)\in D_2\big\}$$
$$\geq P\big\{\{X(t);t\in T\}\in D_1\big\}P\{X(t_0)\in D_2\}.$$

证明 我们不妨设 T 是有限集. 令 $N_j(x_j)$, $N_{j,T}(x_j^{(T)})$ 和 $N_{j,0}(x_j^{(0)})$ 分别为 $\{X_j(t);\ t\in T\cup\{t_0\}\}$, $\{X_j(t);\ t\in T\}$ 和 $X_j(t_0)$ 的密度函数. 注意到对固定的 $\{X_2(t),\cdots,X_N(t);t\in T\cup\{t_0\}\}$, 集合 $D_1' = \big\{x_1(t);\{x(t);t\in T\}\in D_1\big\}$ 和 $D_2' = \{x_1(t_0);x(t_0)\in D_1\}$ 分别为 $\mathcal{R}^{1\times T}$ 和 $\mathcal{R}^1$ 中关于原点对称的凸集, 由命题 1.2.1 得

$$P\big\{\{X(t);t\in T\}\in D_1, X(t_0)\in D_2\big\} = \int_{D_1\times D_2}\prod_{j=1}^{N} N_j(x_j)\,dx_j$$
$$= \int_{D_1\times D_2} N_1(x_1)\,dx_1\prod_{j=2}^{N} N_j(x_j)\,dx_j$$
$$\geq \int_{D_1\times D_2} N_{1,T}(x_1^{(T)})\,dx_1^{(T)}N_{1,0}(x_1^{(0)})\,dx_1^{(0)}\prod_{j=2}^{N} N_j(x_j)\,dx_j.$$

依次对 x_2, x_3, $\cdots$, x_N 进行同样的处理我们得

$$P\big\{\{X(t);t\in T\}\in D_1, X(t_0)\in D_2\big\}$$
$$\geq \int_{D_1\times D_2}\prod_{j=1}^{N}\{N_{j,T}(x_j^{(T)})\,dx_j^{(T)}N_{j,0}(x_j^{(0)})\,dx_j^{(0)}\}$$
$$= P\big\{\{X(t);t\in T\}\in D_1\big\}P\big\{X(t_0)\in D_2\big\},$$

命题得证.

注 1.2.2 我们可把 Khatri-Šidáki 引理 (定理 1.2.4, 1.2.4′) 写成如下形式: 若 $(X_1,\cdots,X_n)$ 是零均值 Gauss 向量, 则

$$P(\max_{1\leq i\leq n}|X_i|\leq 1)\geq P(|X_1|\leq 1)P(\max_{2\leq i\leq n}|X_i|\leq 1). \qquad (1.2.1)$$

这是下述猜测的特殊情形：对任何 $1 \le k \le n$ 有

$$P(\max_{1\le i\le n}|X_i|\le 1)\ge P(\max_{1\le i\le k}|X_i|\le 1)P(\max_{k+1\le i\le n}|X_i|\le 1), \tag{1.2.2}$$

或等价地，设 A 和 B 为可分 Banach 空间 $\mathcal{E}$ 上的两个对称的凸集，X 和 Y 为 $\mathcal{E}$ 上的零均值 Gauss 向量，且 (X,Y) 是联合 Gauss 的，则

$$P(X\in A, Y\in B)\ge P(X\in A)P(Y\in B). \tag{1.2.3}$$

这就是 Gauss 相关性猜测 (Gaussian correlation conjecture, 参见：Gupta 等 1972, Tong 1980, Schechtman, Schumprecht 和 Zinn 1998 等等). (1.2.1) 说明猜测 (1.2.2) 对 $k=1$ 成立，命题 1.2.1 指出当 $\mathcal{E}$ 为 Euclidean 空间时，若 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 的秩至多为 1, 则 (1.2.3) 成立. 在其它一些特殊情形，人们也证明了这一猜测正确. 例如，Pitt (1977) 证明了当 $n=4$, $k=2$ 时，(1.2.2) 成立；Schechtman, Schumprecht 和 Zinn (1998) 证明了当集合 A, B 为对称椭球形的，或者集合不太大时，猜测正确；Harge (1998) 证明了若集合 A, B 中一个是对称椭球的，而另一个是简单对称凸的时，则猜测也正确等等. 对于一般的情形，这一猜测正确与否还不得而知. Shao (1999) 给出了一个与 (1.2.2) 近似的不等式：

$$\begin{aligned}P(\max_{1\le i\le n}|X_i|\le 1)\\ \ge 2^{-k\vee(n-k)}P(\max_{1\le i\le k}|X_i|\le 1)P(\max_{k+1\le i\le n}|X_i|\le 1).\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Li (1999) 给出了相关性猜测的一个弱的形式：对任何 $0<\lambda<1$ 和 $\mathcal{E}$ 中的对称的凸集 A, B, 有

$$P(X\in A, Y\in B)\ge P(X\in \lambda A)P\big(Y\in(1-\lambda^2)^{1/2}B\big). \tag{1.2.5}$$

其中 X, Y 为 $\mathcal{E}$ 上的零均值 Gauss 向量，且 (X,Y) 是联合 Gauss 的.

(1.2.5) 可由 Anderson 不等式得到. 事实上, 令 $a=(1-\lambda^2)^{1/2}/\lambda$, 设 (X^*,Y^*) 为 (X,Y) 的独立复制. 易见 $X-aX^*$ 与 $Y+Y^*/a$ 独立. 由 Anderson 不等式 (推论 1.2.3) 得

$$\begin{aligned}P(X\in A,Y\in B)\geq&P\big((X,Y)+(-aX^*,Y^*/a)\in A\times B\big)\\=&P(X-aX^*\in A,Y+Y^*/a\in B)\\=&P(X-aX^*\in A)P(Y+Y^*/a\in B)\\\geq&P(X\in\lambda A)P\big(Y\in(1-\lambda^2)^{1/2}B\big).\end{aligned}$$

第二章　Gauss 过程的连续模和大增量的极限性质

从这一章起，我们开始研究 Gauss 过程及其相关过程的样本轨道性质. 这一章，我们着重研究实值 Gauss 过程，特别注重多参数过程的研究. 在 2.1 节，我们给出关于 Gauss 过程的连续性的一些基本结果. 在 2.2 节，我们研究一类简单而又非常重要的 Gauss 过程，即分数 Wiener 过程的连续模和大增量的极限性质，以此引入我们的正题. 2.3, 2.4 和 2.5 节研究几个特殊的两参数 Gauss 过程的连续模和大增量的极限性质. 在 2.3 节，我们研究“最简单”的两参数 Gauss 过程，即两参数 Wiener 过程，其增量既是平稳的又是独立的. 2.4 节研究的是两参数分数 Lévy-Wiener 过程，其增量是平稳的，但不再是独立的，这一过程是两参数 Lévy-Wiener 过程的推广. 在 2.5 节，我们考察的是两参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程，其增量既不是平稳的也不是独立的，它是单参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程的推广. 2.6 节考察较一般的两参数 Gauss 过程. 2.7 节考察 Gauss 过程的局部时过程 $L(x,t)$, 这也是一类两参数随机过程.

§2.1　Gauss 过程的连续性

2.1.1　有界性和连续性

设 (T,d) 为一个拟距离空间. 对任意的 $\varepsilon>0$, 记 $N(T,d;\varepsilon)$ 为距离熵 (entropy number), 即在距离 d 意义下，用来覆盖 T 的以 ε 为半径的开球的最小个数. 显然在距离 d 意义下， T 完全有界当且仅当对任何 $\varepsilon>0$ 有 $N(T,d;\varepsilon)<\infty$, 这一性质在我们将要考察的条件下总是满足的. 记 $D=D(T)$ 为 (T,d) 的直径，即 $D=\sup\{d(s,t):s,t\in T\}$.

设 $X=\{X_t;t\in T\}$ 为一零均值 Gauss 过程，定义 T 上的正规距离为 $d_X(s,t)=\|X_t-X_s\|_2$, $s,t\in T$. 易知

$$E\sup_{s,t\in T}|X_s-X_t|=E\sup_{s,t}(X_s-X_t)=2E\sup_{t\in T}X_t.$$

从而对任何 $t_0\in T$ 有

$$\begin{aligned}E\sup_{t\in T}X_t\le&E\sup_{t\in T}|X_t|\le E|X_{t_0}|+E\sup_{s,t\in T}|X_s-X_t|\\ \le&E|X_{t_0}|+2E\sup_{t\in T}X_t.\end{aligned}$$

这个不等式告诉我们当考察几乎处处有界性时，考察 $\sup_t X_t$ 和考察 $\sup_t|X_t|$ 是等价的.

下述结果告诉我们零均值的 Gauss 过程有界当且仅当它的最大值的矩有界.

定理 2.1.1 假设 X 为 T 上的零均值 Gauss 过程，(T,d_X) 有界. 则

$$P\{\sup_{t\in T}X_t<\infty\}=1\Longleftrightarrow E\sup_{t\in T}X_t<\infty.$$

证明 如通常一样，记 $\|X\|$ 为 $\sup_{t\in T}X_t$. 显然 $E\|X\|<\infty\Longrightarrow\|X\|<\infty$ a.s., 因此只要证 "$\Longrightarrow$". 我们将证一个更强的结论，即对充分小的 $\alpha>0$ 有

$$Ee^{\alpha\|X\|^2}<M<\infty,\tag{2.1.1}$$

其中 M 为一绝对常数.

设 Y 和 Z 为 X 的两个独立的复制. 则因为 $(Y+Z)/\sqrt{2}$ 和 $(Y-Z)/\sqrt{2}$ 也是 X 的两个独立的复制，我们有 $(\|Y\|,\|Z\|)$ 和 $(\|Y+Z\|/\sqrt{2},\|Y-Z\|/\sqrt{2})$ 都是 $\|X\|$ 的两对独立的复制. 从而，

对任何实数对 (a,b) 有

$$\begin{aligned}
&P\{\|X\|\le a\}P\{\|X\|>b\}\\
&\quad=P\{\|Y+Z\|\le\sqrt{2}a,\|Y-Z\|>\sqrt{2}b\}\\
&\quad\le P\{\|Y\|>(b-a)\sqrt{2},\|Z\|>(b-a)\sqrt{2}\}\\
&\quad\le\big(P\{\|Y\|>(b-a)\sqrt{2}\}\big)^2.
\end{aligned}$$

取 $a>0$ 使得 $q:=P\{\|X\|\le a\}\in(\frac{1}{2},1)$. 对

$$b=b_n=(\sqrt{2^{n+1}}-1)(\sqrt{2}+1)a$$

重复上述不等式易得，对任何 $x\ge a$ 有

$$P\{\|X\|\ge x\}\le\exp\Big(-\frac{x^2}{24a^2}\log\frac{q}{1-q}\Big),$$

从而

$$Ee^{\alpha\|X\|^2}\le e^{\alpha a^2}+\int_a^\infty\exp\Big\{-\Big(\frac{1}{24a^2}\log\frac{q}{1-q}-\alpha\Big)x^2\Big\}\,dx.$$

取 $\alpha<(\log\frac{q}{1-q})/(24a^2)$ 得 (2.1.1).

注 2.1.1　在上面的证明中，并没有用到 $\|\cdot\|$ 为最大范数的事实，当 X 取值于一个可分 Banach 空间，$\|\cdot\|$ 为任意一个可测半范数时，证明仍成立. 另外，若 d 为 T 上的另一个距离，且在这个距离意义下 T 有界，如果要考察 Gauss 过程 X 相对于距离 d 的有界性，只要简单地附加条件 “d_X 在 (T,d) 上有界” 即可.

下述定理将有界性和连续性紧密地联系在一起.

定理 2.1.2　设 $X=\{X_t;t\in T\}$ 几乎处处有界，令 d 为 T 上的距离使得 d_X 是 d 一致连续的. 则 X 以概率 1, d 一致连续当且仅当

$$\lim_{\eta\to 0}E\sup_{d(s,t)<\eta}(X_s-X_t)=0.$$

为了证明定理 2.1.2, 我们需要熟知的 Borel-Cantelli 引理，这一引理在本书中将经常用到. 我们给出它的推广形式.

引理 2.1.1 设 $\{A_n; n \geq 1\}$ 为一事件序列, 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, 则 $P(A_n, \text{ i.o.}) = 0$, 其中 $\{A_n, \text{ i.o.}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ 且

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{1\leq j<k\leq n} \big(P(A_jA_k) - P(A_j)P(A_k)\big)\Big/\Big(\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\Big)^2 = 0,$$

则 $P(A_n, \text{ i.o.}) = 1$.

证明 证明可在 Petrov(1995) 中找到. 由于证明较简单，为了完整起见，这里给出其详细证明. 首先，引理的前一部分由下式即得:

$$\begin{aligned} P(A_n, \text{ i.o.}) =& P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) \leq P\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \to 0, \quad n\to\infty. \end{aligned}$$

这里用到了条件 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$. 为证引理的后一部分，令 $I_n = I_{A_n}$. 则 $EI_n = P(A_n)$. 从而

$$\begin{aligned} &\liminf_{n\to\infty} P\Big\{\Big|\sum_{k=1}^{n} I_k - \sum_{k=1}^{n} P(A_k)\Big| \geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\Big\} \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \frac{4\mathrm{Var}(\sum_{k=1}^{n} I_k)}{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2} \\ &= \liminf_{n\to\infty} \frac{8\sum_{1\leq k<l\leq n}\big(P(A_kA_l) - P(A_k)P(A_l)\big)}{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2} = 0. \end{aligned}$$

由此得

$$\liminf_{n\to\infty} P(B_n) = 0,$$

其中 $B_n = \{\sum_{k=1}^{n} I_k \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\}$. 从而存在一个递增的整数序列 $\{n_m\}$ 使得 $\sum_{m=1}^{\infty} P(B_{n_m}) < \infty$. 由已证的引理前一部分

得：以概率 1，$\sum_{k=1}^{n_m} I_k \geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n_m} P(A_k)$ 至多对有限个 m 不成立，由此和条件 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ 得 $P(\sum_{k=1}^{\infty} I_k$ 发散$) = 1$. 从而 $P(A_n$, i.o.$) = 1$ 得证.

定理 2.1.2 的证明 令 $\phi_d(\eta) = E\sup_{d(s,t)<\eta}(X_s - X_t)$. 先证必要性. 令 $U_\varepsilon = \{(s,t) \in T \times T; d(s,t) < \varepsilon\}$, $Y_{t,s} = X_t - X_s$. 则 $Y_{t,s}$ 为 $(T \times T, d_Y)$ 上的几乎处处有界的零均值 Gauss 过程，其中

$$d_Y\big((s,t),(s',t')\big) = \|(X_s - X_t) - (X_{s'} - X_{t'})\|_2 \leq d_X(s,t) + d_X(s',t').$$

由于 d_X 是 d 一致连续的，可取 $\varepsilon > 0$ 使得 $(s,t),(s',t') \in U_\varepsilon \Longrightarrow d_Y\big((s,t),(s',t')\big) \leq 1$. 从而 (U_ε, d_Y) 有界. 因此，由定理 2.1.1 得

$$E\sup_{d(s,t)<\varepsilon}|X_t - X_s| < \infty.$$

另外，对几乎每个 ω 我们有

$$\lim_{\eta\to 0}\sup_{d(s,t)<\eta}|X_t(\omega) - X_s(\omega)| = 0,$$

从而由控制收敛定理知 $\lim_{\eta\to\infty}\phi_d(\eta) = 0$.

反过来，可找到序列 η_n 使得 $\phi_d(\eta_n) \leq 4^{-n}$. 考察事件 $A_n = \{\sup_{d(s,t)<\eta_n}|X_s - X_t| > 2^{-n}\}$. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} < \infty$, 所以由 Borel-Cantelli 引理知 X 几乎处处 d 一致连续. 定理得证.

2.1.2 Fernique 条件

现在考察 $T = [0,1]^k$ 的情形，并假设 X 为零均值 Gauss 过程，其方差函数为 Γ. 对任意的 $(s,t) \in T \times T$ 定义 $d(s,t) = |s - t| = \sup_{1\leq i\leq k}|s_i - t_i|$. 令 $\varphi : [0,1] \to \mathcal{R}_+$ 为由 (1.1.8) 定义的函数，即

$$\varphi(h) = \sup_{\substack{(s,t)\in T\times T \\ d(s,t)\leq h}}\|X_s - X_t\|_2. \tag{2.1.2}$$

定理 2.1.3 存在绝对常数 K 使得

$$E\sup_{t\in T}|X_t|\le K\left\{\sup_{t\in T}\|X_t\|_2+\int_1^\infty\varphi(e^{-x^2})\,dx\right\}. \tag{2.1.3}$$

进一步，如果 $\int_1^\infty\varphi(e^{-x^2})dx<\infty$, 则 X 几乎处处一致连续（这里，连续是指 d 连续）.

证明 由定理 1.1.3 和注 1.1.1, 得

$$\begin{aligned}E\sup_{t\in T}|X_t|\le&\left\{\sup_{t\in T}\|X_t\|_2+(2+\sqrt{2})\int_1^\infty\varphi\left(\frac{1}{2}p^{-u^2}\right)du\right\}\\&\cdot\left\{\sqrt{1+4k\log p}+\frac{5}{2\sqrt{e}}\right\}\\\le&K\left\{\sup_{t\in T}\|X_t\|_2+\int_1^\infty\varphi(e^{-u^2})\,du\right\},\end{aligned}$$

并且对任何 $t_0\in T$ 有

$$\begin{aligned}E\sup_{d(t,t_0)\le h}|X_t|\le&\left\{\varphi(h)+(2+\sqrt{2})\int_1^\infty\varphi(hp^{-u^2})\,du\right\}\\&\cdot\left\{\sqrt{1+4k\log p}+\frac{5}{2\sqrt{e}}\right\}\\\le&K\left\{\varphi(h)+\int_1^\infty\varphi(he^{-u^2})\,du\right\}.\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

从而定理的前一部分得证，并且我们得到：对任何 $t_0\in T, X$ 在 t_0 处几乎处处连续. 但是，我们要证明的是 X 一致连续. 为此，我们需要一些引理.

引理 2.1.2 设 $\{X_i(t);t\in T_i\}$, $i=1,2,\cdots,N$ 为零均值 Gauss 过程. 则

$$E\max_{i\le N}\sup_{t\in T_i}X_i(t)\le 2\max_{i\le N}E\sup_{t\in T_i}X_i(t)+3(\log N)^{1/2}\max_{i\le N}\sup_{t\in T_i}\|X_i(t)\|_2.$$

特别地，对任何实值零均值 Gauss 变量 $X_i, i=1,2,\cdots,N$ 我们有

$$E\max_{i\le N}X_i\le 5(\log N)^{1/2}\max_{i\le N}(EX_i^2)^{1/2}.$$

证明 记 $\sup_{t\in T_i} X_i(t)$ 为 $\|X_i\|$, $\sup_{t\in T_i}(EX_i^2(t))^{1/2}$ 为 $\sigma(X_i)$. 我们不妨设要证的不等式右边是有限的，否则不等式显然成立. 对 $\delta \ge 0$, 由分部积分法和 Borell 不等式 (见定理 1.1.1) 得

$$\begin{aligned} E\max_{i\le N}\big|\|X_i\| - E\|X_i\|\big| &\le \delta + \sum_{i=1}^{N}\int_\delta^\infty P\{\big|\|X_i\| - E\|X_i\|\big| > u\}\,du \\ &\le \delta + N\int_\delta^\infty \exp\Big(-\frac{u^2}{2\max_{i\le N}\sigma(X_i)}\Big)\,du. \end{aligned}$$

从而，令 $\delta = (2\log N)^{1/2}\max_{i\le N}\sigma(X_i)$ 得

$$E\max_{i\le N}\|X_i\| \le 2\max_{i\le N}E\|X_i\| + 3(\log N)^{1/2}\max_{i\le N}\sigma(X_i),$$

引理得证.

引理 2.1.3 设 $Y=\{Y_t; t\in T\}$ 为距离空间 (T,d) 上的零均值 Gauss 过程. 令 $d_Y(s,t)=\|Y_s-Y_t\|_2$. 则对任何 $\eta>0$ 有

$$\begin{aligned} E\sup_{d(s,t)<\eta}|Y_s-Y_t| \le K\Big\{&\sup_{t\in T}E\sup_{d(s,t)<\eta}|Y_s-Y_t| \\ &+\sup_{d(s,t)<3\eta}d_Y(s,t)\big(\log N(T,d;\eta)\big)^{1/2}\Big\}, \end{aligned}$$

其中 $K>0$ 为常数.

证明 给定 $\eta>0$, 令 $N=N(T,d;\eta)$ (假设它有限且大于 2). 令 $U=\{u_1,\cdots,u_N\}$ 为 T 的子集使得以 u_i 为中心 $\eta>0$ 为半径的 d 球覆盖 T. 显然

$$\sup_{d(s,t)<\eta}|Y_s-Y_t| \le 2\max_{u\in U}\Big(\sup_{d(t,u)<\eta}|Y_t-Y_u|\Big) + \max_{\substack{u,v\in U\\ d(u,v)<3\eta}}|Y_u-Y_v|.$$

由引理 2.1.2, 得

$$\begin{aligned} E\max_{u\in U}\Big(\sup_{d(t,u)<\eta}|Y_t-Y_u|\Big) &= E\max_{u\in U}\Big(\sup_{d(t,u)<\eta}(Y_t-Y_u)\Big) \\ &\le 2\max_{u\in U}E\Big(\sup_{d(t,u)<\eta}(Y_t-Y_u)\Big) + 3\max_{d(s,t)<\eta}d_Y(s,t)(\log N)^{1/2}; \end{aligned}$$

同理,

$$E \max_{\substack{u,v\in U\\ d(u,v)<3\eta}} |Y_u - Y_v| \le 5 \max_{d(s,t)<3\eta} d_Y(s,t)(\log N^2)^{1/2}.$$

从而引理得证.

定理 2.1.3 的证明的续 由 (2.1.4) 和引理 2.1.3, 得

$$\begin{aligned} &E \sup_{d(s,t)\le h} |X_t - X_s| \\ &\le K\left\{\varphi(h) + \int_1^\infty \varphi(he^{-u^2})\,du + \varphi(3h)(\log h^{-1})^{1/2}\right\}. \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

因为 $\int_1^\infty \varphi(e^{-u^2})\,du < \infty$, 我们有 $u\varphi(e^{-u^2}) \to 0$ $(u \to \infty)$, 从而 $\varphi(h)(\log h^{-1})^{1/2} \to 0$ ($h \to 0$). 因此, 我们得

$$\lim_{h\to 0} E \sup_{d(s,t)\le h} |X_t - X_s| = 0.$$

由定理 2.1.2 知 X 几乎处处连续. 定理得证.

若 $X = \{X(t); t \in [0,1]\}$ 为一个零均值、具有平稳增量的 Gauss 过程, 且 $\varphi(h) = \|X(t+h) - X(t)\|_2$ 为 h 的单调非降函数. 我们以后还将证明 Fernique 条件 $\int_1^\infty \varphi(e^{-u^2})\ du < \infty$ 也是 X 几乎处处有界或连续的必要条件.

2.1.3 主测度条件

如通常一样, 设 T 为一个零均值 Gauss 过程的参数空间, d_X 为 T 上的正规距离. 设 m 为 T 上的概率测度, $g : [0,1] \to \mathcal{R}_+$ 为一个函数, 定义为

$$g(t) = (\log t^{-1})^{1/2}, \quad 0 \le t \le 1.$$

令 $B(t,\varepsilon)$ 表示在距离 d_X 意义下以 t 为中心的 ε 球.

定义 2.1.1 一个概率测度 m 被称为 (相对于 (T, d_X) 的) 主测度 (majorizing measure), 如果

$$\sup_{t\in T}\int_0^\infty g\big(m(B(t,\varepsilon))\big)\,d\varepsilon < \infty. \tag{2.1.6}$$

下述关于 Gauss 过程的有界性和连续性的一般性结果是由 Talagrand (1987) 得到的, 它渊源于 Fernique(1978). 由于其证明太长, 这里不再叙述, 读者可参看 Ledoux 和 Talagrand (1991).

定理 2.1.4 设 $X = \{X_t; t \in T\}$ 为一个零均值 Gauss 过程. 则对某个绝对常数 $K > 0$ 和 (T, d_X) 上的任意概率测度 m 有

$$E\sup_{t\in T} X_t \le K\sup_{t\in T}\int_0^\infty g\big(m(B(t,\varepsilon))\big)\,d\varepsilon, \tag{2.1.7}$$

并且存在 (T, d_X) 上的一个概率测度 m 使得

$$\sup_{t\in T}\int_0^\infty g\big(m(B(t,\varepsilon))\big)\,d\varepsilon \le KE\sup_{t\in T} X_t. \tag{2.1.8}$$

也就是说, X 在 (T, d_X) 上几乎处处有界当且仅当 (T, d_X) 有一个主测度.

进一步, X 在 (T, d_X) 上几乎处处有界且 (一致) 连续当且仅当 (T, d_X) 完全有界且存在一个 (T, d_X) 上的概率测度 m 使得

$$\lim_{\eta\to 0}\sup_{t\in T}\int_0^\eta g\big(m(B(t,\varepsilon))\big)\,d\varepsilon = 0. \tag{2.1.9}$$

注 2.1.2 注意到, 若 $\varepsilon > 2D$, 其中 $D = D(T)$ 为 (T, d_X) 的直径, 则 $m(B(t,\varepsilon)) = 1$, 因而 (2.1.7) 和 (2.1.8) 中的积分上限实际上是 $D/2$. 另外, 设在 T 上有另一个距离 d 且 T 在 d 意义下是紧致的, 如果考察的是零均值 Gauss 过程 X 相对于距离 d 的连续性, 我们只要简单地附加条件: d_X 在 (T, d) 上连续, 也即 X 在

L_2 意义下 (或依概率) 连续. 事实上, 若 (T,d) 为任意一个紧致空间, 则零均值 Gauss 过程 $X=\{X_t;t\in T\}$ 在 (T,d) 上几乎处处连续当且仅当它在 (T,d_X) 上几乎处处连续且 d_X 在 (T,d) 上连续. 上述论断的充分性显然. 下设 X 是 d 连续的, 则 d_X 也是 d 连续的. 由紧致性, X 和 d_X 都是 d 一致连续的. 由定理 2.1.2 得

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E \sup_{d(s,t)\le\varepsilon} |X_s - X_t| = 0.$$

对任意的 $\eta>0$, 令 $A_\eta=\{(s,t)\in T\times T: d_X(s,t)\le\eta\}$. 这是 $T\times T$ 上的闭集且 $\bigcap_\eta A_\eta = A_0$. 易知 $\{(s,t)\in T\times T, d(s,s')\le \varepsilon, d(t,t')\le\varepsilon, (s',t')\in A_0\}$ 为闭集并且包含 A_0. 固定 $\varepsilon>0$. 由紧致性, 存在 $\eta>0$ 使得: 对任何 $(s,t)\in A_\eta$, 存在 $(s',t')\in A_0$ 满足 $d(s,s')\le\varepsilon$ 和 $d(t,t')\le\varepsilon$ 使得

$$|X_s - X_t| \le |X_s - X_{s'}| + |X_{s'} - X_{t'}| + |X_{t'} - X_t|$$

成立. 因为 $(s',t')\in A_0$, 我们知 $X_{s'}=X_{t'}$ 以概率 1 成立. 从而

$$E \sup_{d_X(s,t)\le\eta} |X_s - X_t| \le 2E \sup_{d(s,t)\le\varepsilon} |X_s - X_t|.$$

因此

$$\lim_{\eta\to 0} E \sup_{d_X(s,t)\le\eta} |X_s - X_t| = 0.$$

再次由定理 2.1.2, 我们得 X 几乎处处 d_X 一致连续.

下述推论是 Dudley (1973) 的结果.

推论 2.1.1 设 $X=\{X_t;t\in T\}$ 为零均值 Gauss 过程. 则

$$E\sup_{t\in T} X_t \le K\int_0^\infty \left(\log N(T,d_X;\varepsilon)\right)^{1/2} d\varepsilon, \tag{2.1.10}$$

其中 $K>0$ 为绝对常数. 进一步, 若上式右边的熵积分收敛, 则 X 在 (T,d_X) 上几乎处处有界且 (一致) 连续.

易知 (2.1.10) 中熵积分的积分上限实际上是 D.

证明 可设直径 $D = D(T)$ 有限, 否则对某个 $\varepsilon > 0$ 有 $N(t, d_X; \varepsilon) = \infty$, 从而没有什么要证明的. 我们将证明存在 T 上的一个概率测度 m 使得

$$\sup_{t\in T} \int_0^D g\big(m(B(t,\varepsilon))\big)\, d\varepsilon \le K \int_0^D \big(\log N(T, d_X; \varepsilon)\big)^{1/2}\, d\varepsilon, \tag{2.1.11}$$

其中 K 为绝对常数. 令 l_0 为使得 $2^{-l_0} \ge D$ 成立的最大整数. 对任意的 $l \ge l_0$, 令 $T_l \subset T$ 为能够覆盖 T 的个数最小的一族球 $\{B(t, 2^{-l}), t \in T_l\}$ 的球心组成的集合. 由定义知 $Card\ T_l = N(T, d_X; 2^{-l})$. 考察 T 上的概率测度 m:

$$m = \sum_{l > l_0} 2^{-l+l_0} N(T, d_X; 2^{-l})^{-1} \sum_{t\in T_l} \delta_t,$$

其中 δ_t 为在 t 处的单点测度 (Dirac 测度). 显然, 对任何 t 和 $l > l_0$ 有 $m(B(t, 2^{-l})) \ge 2^{-l+l_0} N(T, d_X; 2^{-l})^{-1}$. 从而

$$\begin{aligned}
\int_0^D g\big(m(B(t,\varepsilon))\big)\, d\varepsilon &\le \sum_{l>l_0} 2^{-l} g\big(m(B(t,2^{-l}))\big) \\
&\le \sum_{l>l_0} 2^{-l} \big(\log(2^{l-l_0} N(T, d_X; 2^{-l}))\big)^{1/2} \\
&\le \sum_{l>l_0} 2^{-l} \big(\log 2^{l-l_0}\big)^{1/2} + \sum_{l>l_0} 2^{-l} \big(\log N(T, d_X; 2^{-l})\big)^{1/2} \\
&\le 2^{-l_0+1} \int_0^{1/2} (\log x^{-1})^{1/2}\, dx + 2\int_0^D \big(\log N(T, d_X; \varepsilon)\big)^{1/2}\, d\varepsilon \\
&\le 4D \int_0^{1/2} \big(\log x^{-1}\big)^{1/2}\, dx + 2\int_0^D \big(\log N(T, d_X; \varepsilon)\big)^{1/2}\, d\varepsilon \\
&\le 2\Big(1 + 2\int_0^{1/2} \big(\log x^{-1}\big)^{1/2}\, dx\Big) \int_0^D \big(\log N(T, d_X; \varepsilon)\big)^{1/2}\, d\varepsilon.
\end{aligned}$$

(2.1.11) 得证. 同理, 对任何 $\eta \le D$, 若令 l_0 为满足 $2^{-l_0} > \eta$ 的最

大整数，则得

$$\int_0^\eta g\big(m(B(t,\varepsilon))\big)\,d\varepsilon \le 2\Big(1+2\int_0^{1/2}\Big(\log\frac{1}{x}\Big)^{1/2}dx\Big) \cdot \int_0^\eta \big(\log N(T,d_X;\varepsilon)\big)^{1/2}\,d\varepsilon. \quad (2.1.12)$$

由定理 2.1.4, (2.1.10) 得证. 当熵积分收敛时， m 为满足 (2.1.9) 的主测度，从而 X 在 (T,d_X) 上几乎处处有界且 (一致) 连续. 推论得证.

当 X 平稳时, 上述推论的逆也可以成立. 为了叙述这一结果, 我们只考察 T 为 $\mathcal{R}_+^k$ 的子集的情形, 并记 $T_1+T_2=\{t+s:t\in T_1, s\in T_2\}(\forall T_1,T_2\subset\mathcal{R}_+^k)$, $T'=T+T$, $T''=T+T+T$, $t+T=\{t+s:s\in T\}$ ($\forall t\in\mathcal{R}_+^k, T\subset\mathcal{R}_+^k$).

定理 2.1.5 设 $X=\{X_t;t\in\mathcal{R}_+^k\}$ 为零均值 Gauss 过程. 假设 X 具有平稳增量，即 d_X 在下述意义下是平移不变的: $d_X(u+s,u+t)=d_X(s,t)$ ($u,s,t\in\mathcal{R}_+^k$). 设 T 为 $\mathcal{R}_+^k$ 中具有非空内部的紧子集. 则 X 在 T 上几乎处处有界且 (一致) 连续当且仅当 d_X 在 $T\times T$ 上连续，并且

$$H(T,d_X):=\int_0^\infty \big(\log N(T,d_X;\varepsilon)\big)^{1/2}d\varepsilon<\infty. \quad (2.1.13)$$

进一步，存在绝对常数 $K>0$ 使得

$$K^{-1}\{H(T,d_X)-\big(\log(|T''|/|T|)\big)^{1/2}D(T)\} \le E\sup_{t\in T}X_t\le KH(T,d_X), \quad (2.1.14)$$

其中 $|\cdot|$ 为 $\mathcal{R}_+^k$ 上的 Lebesgue 测度.

证明 由推论 2.1.1 即得不等式的右边. 由定理 2.1.4, 只要证明对 $T\subset\mathcal{R}_+^k$ 有

$$\frac{1}{2}\int_0^D\Big(\log\Big(\frac{|T|}{|T''|}N(T,d_X;\varepsilon)\Big)\,d\varepsilon\Big)^{1/2}\le\sup_{t\in T}\int_0^D g\big(m(B(t,\varepsilon))\big)\,d\varepsilon, \quad (2.1.15)$$

其中 m 为 T 上的概率测度, $D=D(T)$ 为 T 的 d_X 直径. 令 M 为不等式 (2.1.15) 右边的值, 记 $\lambda(\cdot)=|\cdot|$ 为 $\mathcal{R}_+^k$ 上的 Lebesgue 测度. 由于 $g(x)$ 为凸函数, 由 Jensen 不等式得

$$\begin{aligned} M &\geq \int_0^D \frac{1}{|T|}\int_T g\big(m(B(t,\varepsilon))\big)\,d\lambda(t)\,d\varepsilon \\ &\geq \int_0^D \left(\log\frac{|T|}{\int_T m(B(t,\varepsilon))\,d\lambda(t)}\right)^{1/2} d\varepsilon. \end{aligned}$$

由 Fubini 定理和平移不变性, 得

$$\int_T m(B(t,\varepsilon))\,d\lambda(t)=\int_T |T\cap B(t,\varepsilon)|\,dm(s)\leq |T'\cap B(0,\varepsilon)|.$$

从而,

$$M\geq \int_0^D\left(\log\frac{|T|}{|T'\cap B(0,\varepsilon)|}\right)^{1/2} d\varepsilon.$$

设 $\{t_1,\cdots,t_p\}$ 为 T 中满足条件 $\big(t_i+B(0,\varepsilon)\big)\cap\big(t_j+B(0,\varepsilon)\big)=\emptyset$ $\forall i\neq j$ 的最大的点集. 若 $t\in T$, 由最大性, 存在 $i=1,\cdots,p$ 使得 $\big(t+B(0,\varepsilon)\big)\cap\big(t_i+B(0,\varepsilon)\big)\neq\emptyset$. 从而 $t\in\{t_i+B(0,2\varepsilon)\}$. 由此得 $T\subset\cup_{i=1}^p\{t_i+B(0,2\varepsilon)\}$, 从而 $N(T,d_X;2\varepsilon)\leq p$. 注意到 $t_i+T'\cap B(0,\varepsilon)\subset T''$, 我们有

$$p|T'\cap B(0,\varepsilon)|=\sum_{i=1}^p|t_i+T'\cap B(0,\varepsilon)|=\left|\bigcup_{i=1}^p\{t_i+T'\cap B(0,\varepsilon)\}\right|\leq|T''|.$$

因此

$$N(t,d_X;2\varepsilon)\leq\frac{|T''|}{|T'\cap B(0,\varepsilon)|}.$$

(2.1.15) 得证. 定理证毕.

通常情况下推论 2.1.2 的逆不成立. 下面是一个反例. 令 $T=\mathcal{Z}_+$, 这时的过程实际上是一个序列 $\{X_n;n\geq 1\}$. 设 X_n 独立且

$$\sigma_n=\sigma(X_n)=(EX_n^2)^{1/2}\leq(1+\log n)^{-1/2}.$$

则序列 $\{X_n\}$ 几乎处处有界，且有绝对常数 K，成立

$$E\sup_n |X_n| \le K. \tag{2.1.16}$$

事实上，注意到对任意的 $n \ge 1$ 和 $x \ge 2$ 有

$$P\{|X_n| \ge x\} \le e^{-x^2/(2\sigma_n^2)} \le e^{-\frac{1}{2}x^2(1+\log n)} \le Cn^{-x^2/2},$$

从而

$$P\{\sup_n |X_n| \ge x\} \le \sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| \ge x\} \le C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}x^2} \le Ce^{-\frac{1}{2}x^2},$$

对上式进行积分即得 (2.1.16).

但是另一方面，序列 $\{X_n; n \ge 1\}$ 不具有有限的熵积分. 事实上，给定 $\varepsilon > 0$, 对 $n < n_\varepsilon = \exp\big(-1 + 1/(2\varepsilon^2)\big)$ 我们有 $\sigma(X_n) > \varepsilon\sqrt{2}$, 从而

$$d_X(n,m) > 2\varepsilon, \quad \forall n, m < n_\varepsilon,$$

这意味着如果 $n, m < n_\varepsilon$, 则 n 和 m 不在同一个 ε 球中，由此知 $N(T, d_X; \varepsilon) \ge n_\varepsilon - 1$, 因此

$$\inf_{\varepsilon > 0} \varepsilon\big(\log N(T, d_X; \varepsilon)\big)^{1/2} > 0,$$

从而熵积分 $\int \big(\log N(T, d_X; \varepsilon)\big)^{1/2} d\varepsilon$ 不可能有限.

在 $k = 1$ 的特殊情形，下述定理告诉我们 Fernique 条件也是具有平稳增量的零均值 Gauss 过程有界且连续的必要条件.

定理 2.1.6 设 $X = \{X_t; t \in [0,1]\}$ 为具有平稳增量的零均值 Gauss 过程. 假设 $\sigma^2(t) = E(X_t - X_0)^2$ 是单调增加的. 则 X 几乎处处有界且 (一致) 连续当且仅当

$$\int_0^{1/2} \frac{\sigma(u)}{u(\log u^{-1})^{1/2}}\, du < \infty.$$

而且，存在常数 K 使得

$$K^{-1}\int_0^{1/2}\frac{\sigma(u)}{u(\log u^{-1})^{1/2}}\,du\le\sup_{t\in[0,1]}X_t\le K\int_0^{1/2}\frac{\sigma(u)}{u(\log u^{-1})^{1/2}}\,du. \tag{2.1.17}$$

证明 注意到

$$\int_0^{1/2}\frac{\sigma(u)}{u(\log u^{-1})^{1/2}}\,du=\int_{(\log 2)^{1/2}}^{\infty}\sigma(e^{-u^2})\,du,$$

由定理 2.1.3, 只要证明左边的不等式. 注意到 $D=\sup_{s,t\in[0,1]}\sigma(|t-s|)=\sigma(1)$ 和 $N([0,1],d_X;\varepsilon)=1\wedge\dfrac{1}{2\mathrm{inv}\sigma(\varepsilon)}$, 由定理 2.1.5 有

$$\begin{aligned}\int_0^{\sigma(1)}\left(\log\frac{1}{\mathrm{inv}\sigma(\varepsilon)}\right)^{1/2}d\varepsilon\le&CE\sup_{t\in[0,1]}X_t+C\sigma(1)\\ \le&CE\sup_{t\in[0,1]}X_t+C(E(X_1-X_0)^2)^{1/2}\\ \le&CE\sup_{t\in[0,1]}X_t+CE|X_1-X_0|\\ \le&CE\sup_{t\in[0,1]}X_t+CE\sup_{s,t\in[0,1]}|X_s-X_t|\\ \le&CE\sup_{t\in[0,1]}X_t.\end{aligned}$$

可设 $E\sup_{t\in[0,1]}X_t<\infty$, 否则没有什么要证明的. 因此上述积分收敛. 由分部积分法得

$$\begin{aligned}&\int_0^{\sigma(1)}\left(\log\frac{1}{\mathrm{inv}\sigma(\varepsilon)}\right)^{1/2}d\varepsilon\\ &=\varepsilon\left(\log\frac{1}{\mathrm{inv}\sigma(\varepsilon)}\right)^{1/2}\Bigg|_0^{\sigma(1)}-\int_0^{\sigma(1)}\varepsilon\,d\left(\log\frac{1}{\mathrm{inv}\sigma(\varepsilon)}\right)^{1/2}\\ &\ge\varepsilon\left(\log\frac{1}{\mathrm{inv}\sigma(\varepsilon)}\right)^{1/2}\Bigg|_0^{\sigma(1)}+\int_0^{\infty}\sigma(e^{-u^2})\,du.\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{inv}\sigma(\varepsilon)$ 非降, 由积分的收敛性易知当 $\varepsilon\to0$ 时, $\varepsilon\left(\log\dfrac{1}{\mathrm{inv}\sigma(\varepsilon)}\right)^{1/2}$

$\to 0$. 从而

$$\int_0^{\sigma(1)} \left(\log \frac{1}{\mathrm{inv}\sigma(\varepsilon)}\right)^{1/2} d\varepsilon \geq \int_0^{\infty} \sigma(e^{-u^2})\, du$$
$$\geq \int_{(\log 2)^{1/2}}^{\infty} \sigma(e^{-u^2})\, du - (\log 2)^{1/2}\sigma(1).$$

因此

$$\int_0^{1/2} \frac{\sigma(u)}{u(\log u^{-1})^{1/2}}\, du \leq KE \sup_{t\in[0,1]} X_t + \sigma(1) \leq KE \sup_{t\in[0,1]} X_t.$$

定理得证.

2.1.4 向量值 Gauss 过程

设 B 为一个可分的 Banach 空间, 其对偶空间记为 B'. 一个取值于 B 的过程 $X = \{X_t; t \in T\}$ 是以 T 为指标的取值于 B 的一族 Borel 随机变量 $\{X_t; t \in T\}$. X 称为 (零均值)Gauss 的, 若每个有限样本 $(X_{t_1}, \cdots, X_{t_N})$, $t_i \in T$ 为 B^N 中的 (零均值)Gauss 元. 下述定理是由 Fernique (1990) 得到的.

定理 2.1.7 设 (T, d) 为一个距离空间, $X = \{X_t; t \in T\}$ 为取值于 B 的零均值 Gauss 过程. 假设存在一个取值于 B 的零均值 Gauss 变量 ξ 使得

$$Ef^2(X_t) \leq Ef^2(\xi), \quad \forall (f, t) \in B' \times T,$$

则存在绝对常数 $C > 0$ 使得

$$E\sup_{t\in T} \|X_t\| \leq C\Big\{E\|\xi\| + \sup_{\|f\|\leq 1} \int_0^{\infty} \big(\log N(T, d_{f(X)}; \varepsilon)\big)^{1/2} d\varepsilon\Big\}. \tag{2.1.18}$$

此外, 假设 (T, d) 是紧距离空间, 若对任何 $f \in B'$, $\|f(X_t) - f(X_s)\|_2$ 在 (T, d) 上连续, 并且

$$\lim_{\eta\to 0} \sup_{\|f\|\leq 1} \int_0^{\eta} \big(\log N(T, d_{f(X)}; \varepsilon)\big)^{1/2} d\varepsilon = 0, \tag{2.1.19}$$

则 X 在 (T,d) 上几乎处处连续.

证明 首先证明 (2.1.18). 令 B_1' 为 B' 中的单位球. 我们把 X 看作是以 $T^* = B_1' \times T$ 为指标集的过程. 由定理 2.1.5, 以 B_1' 为指标集的实值 Gauss 过程 $\xi = \{f(\xi); f \in B_1'\}$ 有主测度, 即存在 (B_1', d_ξ) 上的概率测度 μ 使得

$$\sup_{f\in B_1'} \int_0^\infty g\big(\mu(B(f,\varepsilon))\big)\, d\varepsilon \le CE \sup_{f\in B_1'} f(\xi) = CE\|\xi\|,$$

其中 $B(f,\varepsilon)$ 为 ε 球, 其对应的距离为其中心 f 所在空间上对应的正规距离, 即 $d_\xi(f,g) = \|f(\xi) - g(\xi)\|_2$, $f,g \in B_1'$. (我们还将用到这种球的概念). 令 $D = D(T^*)$ 为 $B_1' \times T$ 的 d_X 直径, 其中

$$d_X\big((f,t),(g,s)\big) = \|f(X_t) - g(X_s)\|_2, \quad f,g \in B', \quad s,t \in T.$$

对每个 $f \in B_1'$, 令 $S(f,u)$ 为能够覆盖 T 的个数最小的一族球 $B_{f(X)}(t,u), t \in S(f,u)$ 的球心. 由定义, $Card\, S(f,u) = N(T, d_{f(X)}; u)$. 考察 T 上的概率测度 π_f:

$$\pi_f = \sum_{p=1}^{\infty} 2^{-p} \sum_{s\in S(f,D/2^p)} \frac{\delta_s}{N(T, d_{f(X)}; D/2^p)},$$

其中 δ_t 为在 t 处的 Dirac 测度. 由 μ 和 $\{\pi_f; f \in B_1'\}$, 我们构造 $B_1' \times T$ 上的一个概率测度 λ 为

$$\lambda = \int (\delta_f \otimes \pi_f)\, d\mu(f).$$

由定理 2.1.5 得

$$\begin{aligned} E\sup_{t\in T}\|X_t\| &= E \sup_{(f,t)\in B_1'\times T} f(X_t) \\ &\le K \sup_{(f,t)\in B_1'\times T} \int_0^\infty g\Big(\lambda\Big(B\big((f,t),\varepsilon\big)\Big)\Big)\, d\varepsilon. \end{aligned}$$

给定 $(f,t)\in B_1'\times T$ 和 $p\geq 1$, 对任意的 $(g,s)\in B_1'\times T$, 由三角不等式有

$$\begin{aligned}
d_X\big((f,t),(g,s)\big) &\leq \|f(X_t)-g(X_t)\|_2+\|g(X_t)-g(X_s)\|_2\\
&\leq d_\xi(f,g)+d_{g(X)}(t,s),\\
d_{g(X)}(s,t) &\leq \|f(X_s)-f(X_t)\|_2+\|f(X_s)-g(X_s)\|_2\\
&\quad +\|f(X_t)-g(X_t)\|_2\\
&\leq d_{f(X)}(s,t)+2d_\xi(f,g).
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
&d_{g(X)}(t,s)\leq D/2^{p+1},\\
&d_\xi(g,f)\leq D/2^{p+3}\Longrightarrow d_X\big((f,t),(g,s)\big)\leq D/2^p.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\lambda\left(B\big((f,t),D/2^p\big)\right)\\
&\quad\geq\int\pi_g\left(B_{g(X)}(t,D/2^{p+1})\right)I\{g;g\in B(f,D/2^{p+3})\}\,d\mu(g)\\
&\quad\geq\int\frac{1}{2^{p+1}N(T,d_{g(X)};D/2^{p+1})}I\{g;g\in B(f,D/2^{p+3})\}\,d\mu(g).
\end{aligned}$$

注意到

$$d_{f(X)}(s,t)\leq D/2^{p+2},\ \ d_\xi(f,g)\leq D/2^{p+3}\Longrightarrow d_{g(X)}(s,t)\leq D/2^{p+1},$$

并且 $\{B_{f(X)}(s,D/2^{p+2});s\in S(f,D/2^{p+2})\}$ 覆盖 T, 我们得：若 $d_\xi(f,g)\leq D/2^{p+3}$, 则 $\{B_{g(X)}(s,D/2^{p+1});s\in S(f,D/2^{p+2})\}$ 覆盖 T. 由此得

$$\begin{aligned}
&d_\xi(f,g)\leq D/2^{p+3}\\
&\Longrightarrow N(T,d_{g(X)};D/2^{p+1})\leq N(T,d_{f(X)};D/2^{p+2}).
\end{aligned}$$

从而

$$\lambda\left(B\big((f,t),D/2^p\big)\right)\geq\frac{1}{2^{p+1}N(T,d_{f(X)};D/2^{p+2})}\mu\big(B(f,D/2^{p+3})\big).$$

因此，对每个 $(f,t)\in B_1'\times T$, 有

$$\int g\Big(\lambda\Big(B\big((f,t),\varepsilon\big)\Big)\Big)\ d\varepsilon \le \sum_{p=0}^{\infty}\frac{D}{2^p}g\Big(\lambda\Big(B\big((f,t),D/2^p\big)\Big)\Big)$$

$$\le \sum_{p=0}^{\infty}\frac{D}{2^p}g\left(\frac{\mu\big(B(f,D/2^{p+3})\big)}{2^{p+1}N(T,d_{f(X)};D/2^{p+2})}\right)$$

$$\le \sum_{p=0}^{\infty}\frac{D}{2^p}\Big\{(\log 2^{p+1})^{1/2}+g\left(\mu\big(B(f,D/2^{p+3})\big)\right)$$

$$+\big(\log N(T,d_{f(X)};D/2^{p+2})\big)^{1/2}\Big\}$$

$$\le K\left\{D+\int_0^{\left(\mu\left(B(f,u)\right)\right)\ du}\right.$$

$$\left.+\int_0^D\big(\log N(T,d_{f(X)};u)\big)^{1/2}\ du\right\}.$$

从而

$$E\sup_{t\in T}\|X_t\|$$

$$\le K\left\{D+E\|\xi\|+\sup_{f\in B_1'}\int_0^D\big(\log N(T,d_{f(X)};u)\big)^{1/2}\ du\right\}.$$

注意到

$$D\le \sup_{\substack{f,g\in B_1'\\ s,t\in T}}\|f(X_s)-g(X_t)\|_2\le 2\sup_{(f,t)\in B_1'\times T}\|f(X_t)\|_2$$

$$\le 2\sup_{f\in B_1'}\|f(\xi)\|_2=(2\pi)^{1/2}\sup_{f\in B_1'}E|f(\xi)|\le(2\pi)^{1/2}E\|\xi\|,$$

我们知对某个常数 C 有

$$E\sup_{t\in T}\|X_t\|$$

$$\le C\left\{E\|\xi\|+\sup_{f\in B_1'}\int_0^{(2\pi)^{1/2}E\|\xi\|}\big(\log N(T,d_{f(X)};u)\big)^{1/2}\ du\right\}.$$

这一个不等式蕴涵了 (2.1.18).

现在，假设 (2.1.19) 成立. 若 F 为 B 的一个有限维子空间，令 T_F 为商映射 $B \to B/F$, 由上述已经证明的不等式得

$$
\begin{aligned}
&E\sup_{t\in T}\|T_F(X_t)\| \\
\leq &C\left\{E\|T_F(\xi)\| + \sup_{f\in B_1'}\int_0^{\sqrt{2\pi}E\|T_F(\xi)\|}\left(\log N(T, d_{f(X)}; u)\right)^{\frac{1}{2}}du\right\}.
\end{aligned}
$$

若 F_n 为 B 的一列有限维子空间，满足 $F_n \uparrow B$, 则

$$
\lim_{n\to\infty} E\|T_{F_n}(\xi)\| = 0.
$$

因此我们有

$$
\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in T}\|T_{F_n}(X_t)\| = 0 \quad \text{a.s.}, \qquad n\to\infty.
$$

另外，对每个 $f \in B_1'$, 由推论 2.1.1 和 $\|f(X_t) - f(X_t)\|_2$ 的连续性假设知 $f(X_t)$ 在 (T, d) 上几乎处处连续. 由此得取值于有限维空间 F_n 的过程 $X - T_{F_n}(X)$ 在 (T, d) 上几乎处处连续. 从而 X 在 (T, d) 上几乎处处连续. 定理得证.

下述结论是定理 2.1.7 和定理 2.1.5 的简单推论.

推论 2.1.2 设 $X = \{X_t; t\in T\}$ 为取值于 B 的零均值平稳 Gauss 过程，其中 T 为 $\mathcal{R}_+^k$ 中的具有非空内部的紧子集. 那么对某个常数 $C > 0$ 有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big(E\|X_0\| + \sup_{\|f\|\leq 1} E\sup_{t\in T} f(X_t)\Big) \leq E\sup_{t\in T}\|X_t\| \\
\leq &C\Big(1+\log\frac{|T''|}{|T|}\Big)\Big(E\|X_0\| + \sup_{\|f\|\leq 1} E\sup_{t\in T} f(X_t)\Big). \quad (2.1.20)
\end{aligned}
$$

进一步，X 在 T 上几乎处处连续当且仅当对每个 $f \in B'$, $\|f(X_t) - f(X_s)\|_2$ 在 $T\times T$ 上连续，且

$$
\lim_{\eta\to\infty}\sup_{\|f\|\leq 1} E\sup_{t\in\eta T} f(X_t) = 0. \qquad (2.1.21)
$$

2.1.5 独立 Ornstein-Uhlenbeck 过程的无穷级数

设 $\{Y(t); -\infty < t < \infty\} = \{X_k(t); -\infty < t < \infty\}_{k=1}^{\infty}$ 为一列独立的 Ornstein-Uhlenbeck (O-U) 过程, 其系数为 $\gamma_k \geq 0, \lambda_k > 0$, 也即 $X_k(\cdot)$ 为平稳的零均值 Gauss 过程满足 $EX_k(s)X_k(t) = (\gamma_k/\lambda_k)\exp(-\lambda_k|t-s|)$, $k = 1, 2, \cdots$.

过程 $Y(\cdot)$ 是由 Dawson (1972) 作为下述随机微分方程无穷组列的平稳解引入的:

$$d\,X_i(t) = -\lambda_i X_i(t)\,dt + (2\gamma_i)^{1/2}\,dW_i(t) \quad (i = 1, 2, \cdots), \tag{2.1.22}$$

其中 $\{W_i(t); -\infty < t < \infty\}$ 为独立的标准 Wiener 过程. 自从 Dawson (1972) 引入后, 这类过程已经在文献中得到了广泛的研究. 由于它们在纯数学和应用数学的许多领域里频频出现, 它们显得非常重要. 自然, 它们在随机微分方程的研究中继续起着重要的作用 (参见 Dawson (1975), Ricciardi 和 Sacerdote (1979), Walsh (1981), Antoniadis 和 Carmona (1987) 及 Itô (1984)). 它们也出现在构造量子场理论 (参见 Carmona (1977) 和 Gross (1977))、无穷粒子系统理论 (参见 Holley 和 Strook (1978)) 以及无穷维扩散过程等 (参见 Itô (1984), Kuo (1975), Piech (1975), Strook (1981) 和 Schmuland (1988)) 的研究中.

Walsh (1981) 利用随机过程给出了神经反射的数学模型并研究了他引入的过程的许多解析性质. 其中一个有趣的过程是 $Y(\cdot)$ 的坐标分量过程的无穷级数 (独立 O-U 过程的无穷级数), 即过程 $X(\cdot)$:

$$\{X(t); -\infty < t < \infty\} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} X_k(t); -\infty < t < \infty\right\}, \tag{2.1.23}$$

其中 $X_k(\cdot)$ 为 $Y(\cdot)$ 的 O-U 分量.

Csáki, Csörgő, Lin 和 Révész (1991) 研究了过程 $X(\cdot)$ 的样本轨道性质. 如果级数 $\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j/\lambda_j$ 收敛, 那么对每一固定的 t, $X(t)$

是一均值为零、方差为 $\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j/\lambda_j$ 的随机变量. 然而, 如果仅仅有这一假设, $X(\cdot)$ 还不一定是 $\mathcal{R}$ 上 a.s. 连续的 Gauss 过程. 下面的定理给出关于 $X(\cdot)$ 的连续性的结果. $Y(\cdot)$ 也可以直接当做 l^p 值 Gauss 过程来研究, 我们将在下一章讨论.

定理 2.1.8 设 $X(\cdot)$ 如 (2.1.23) 所示, 定义

$$\{X(t,n);-\infty<t<\infty,n=1,2,\cdots\}$$
$$=\Big\{\sum_{k=1}^{n}X_k(t);-\infty<t<\infty,n=1,2,\cdots\Big\}. \quad (2.1.24)$$

假设对某个 $\delta>0$ 有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{\lambda_k}\big(\log(\lambda_k\vee e)\big)^{1+\delta}<\infty, \quad (2.1.25)$$

则以概率 1, $X(t,n)\to X(t)$ 在任何有限区间上对于 t 一致收敛, 即, 对任意的 $\varepsilon>0$, $T>0$ 和几乎所有的 $\omega\in\Omega$, 存在整数 $n_0=n_0(\varepsilon,T,\omega)$ 使得当 $n\geq n_0$ 时有

$$\sup_{|t|\leq T}|X(t,n,\omega)-X(t,\omega)|\leq\varepsilon. \quad (2.1.26)$$

从而, Gauss 过程 $\{X(t);-\infty<t<\infty\}$ 以概率 1 连续.

证明 根据 Itô-Nisio 定理 (参见 Ledoux 和 Talagrand 1991 的定理 6.1), 为证 (2.1.26), 只要证明当 $n\to\infty$ 时

$$\sup_{|t|\leq T}|X(t,n)-X(t)|=\sup_{|t|\leq T}\Big|\sum_{k=n+1}^{\infty}X_k(t)\Big|$$

依概率趋于 0. 从而只要证明对任意的 $\varepsilon>0$ 有

$$\lim_{n\to\infty}P\Big\{\sup_{|t|\leq T}\Big|\sum_{k=n+1}^{\infty}X_k(t)\Big|>\varepsilon\Big\}=0.$$

因此，只要证明在条件 (2.1.25) 下，对任意的 $\varepsilon > 0$ 和 $0 < \eta < 1$ 存在 $n_0 = n_0(\varepsilon, \eta)$ 使得当 $m > n \geq n_0$ 时,

$$P\left\{\sup_{|t|\leq T}\Big|\sum_{k=n+1}^{m} X_k(t)\Big| > \varepsilon\right\} \leq \eta,$$

令

$$X_{m,n}(t) = X(t,m) - X(t,n) = \sum_{k=n+1}^{m} X_k(t),$$

那么，对每个 $m > n$，过程 $\{X_{m,n}(t); -\infty < t < \infty\}$ 为平稳的零均值 Gauss 过程满足

$$EX_{m,n}^2(t) = \sum_{k=n+1}^{m} \gamma_k/\lambda_k,$$

$$EX_{m,n}(t)X_{m,n}(s) = \sum_{k=n+1}^{m} (\gamma_k/\lambda_k)\exp(-\lambda_k|t-s|),$$

$$\begin{aligned}\sigma_{m,n}^2(h) :&= E\big(X_{m,n}(t+h) - X_{m,n}(t)\big)^2 \\ &= 2\sum_{k=n+1}^{m} (\gamma_k/\lambda_k)\big(1 - \exp(-\lambda_k h)\big)\end{aligned}$$

对任何 $t, s \in \mathcal{R}$ 和 $h > 0$ 成立. 记

$$K_1 = \{k : \lambda_k < e^{u^2/2}\}, \quad K_2 = \{k : \lambda_k \geq e^{u^2/2}\}.$$

则

$$\begin{aligned}&\int_1^\infty \Big(\sum_{\substack{k=n+1\\k\in K_1}}^{m} \frac{\gamma_k}{\lambda_k}\big(1 - \exp(-\lambda_k e^{-u^2})\big)\Big)^{1/2} du \\ &\leq \int_1^\infty \Big(\sum_{k=n+1}^{m} \frac{\gamma_k}{\lambda_k}\cdot \lambda_k e^{-u^2} I_{\{\lambda_k < e^{u^2/2}\}}\Big)^{1/2} du \\ &\leq \int_1^\infty \Big(\sum_{k=n+1}^{m} \frac{\gamma_k}{\lambda_k}\Big)^{1/2} e^{-u^2/4}\, du \leq 4\Big(\sum_{k=n+1}^{m} \frac{\gamma_k}{\lambda_k}\Big)^{1/2},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\int_1^\infty \Big(\sum_{\substack{k=n+1\\k\in K_2}}^m \frac{\gamma_k}{\lambda_k}\big(1-\exp(-\lambda_k e^{-u^2})\big)\Big)^{1/2} du \\
&\quad\le \int_1^\infty \Big(\sum_{k=n+1}^m \frac{\gamma_k}{\lambda_k} I_{\{\lambda_k \ge e^{u^2/2}\}}\Big)^{1/2} du \\
&\quad\le \int_1^\infty \Big(\sum_{k=n+1}^m \frac{\gamma_k}{\lambda_k} (\log^+ \lambda_k)^{1+\delta} \cdot \Big(\frac{2}{u^2}\Big)^{1+\delta}\Big)^{1/2} du \\
&\quad\le 2^{(1+\delta)/2}\delta^{-1} \Big(\sum_{k=n+1}^m \frac{\gamma_k}{\lambda_k} (\log^+ \lambda_k)^{1+\delta}\Big)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

从而

$$
\int_1^\infty \sigma_{m,n}(e^{-u^2})\, du \le C\Big\{ \sum_{k=n+1}^m \frac{\gamma_k}{\lambda_k}\Big(\log(\lambda_k \vee e)\Big)^{1+\delta}\Big\}^{1/2}.
$$

由定理 2.1.3 得

$$
E \sup_{0\le t\le 1} |X_{m,n}(t)| \le K\Big\{ \sum_{k=n+1}^m \frac{\gamma_k}{\lambda_k}\Big(\log(\lambda_k \vee e)\Big)^{1+\delta}\Big\}^{1/2} =: K\eta_{m,n},
$$

其中 K 为常数. 由于过程 $\{X_{m,n}(t); -\infty < t < \infty\}$ 是平稳的, 我们有

$$
E \sup_{|t|\le T} |X_{m,n}(t)| \le 2(T+1)E \sup_{0\le t\le 1} |X_{m,n}(t)| \le 2(T+1)K\eta_{m,n}.
$$

由条件 (2.1.25) 知 $\eta_{m,n} \to 0$ $(n\to\infty)$. 从而, 对充分大的 n_0, 当 $m > n \ge n_0$ 时有

$$
P(\sup_{|t|\le T} |X_{m,n}(t)| > \varepsilon) \le \frac{2K(T+1)}{\varepsilon}\eta_{m,n} < \eta.
$$

定理 2.1.8 得证.

§2.2 分数 Wiener 过程

从这一节开始，我们研究 Gauss 过程的连续模与大增量的极限性质. 我们首先考察一个简单而又重要的 Gauss 过程，即分数 Wiener 过程，或者叫做分数 Brown 运动.

阶为 α $(0 < \alpha < 1)$ 的分数 Wiener 过程 $\{Z(t); t \in \mathcal{R}\}$ 是一个零均值、具有平稳增量的实值 Gauss 过程，满足 $Z(0) = 0$ 且 $\sigma^2(|t|) = EZ^2(t) = |t|^{2\alpha}$ $(t \in \mathcal{R})$. 显然，当 $\alpha = 1/2$ 时，$\{Z(t); t \in R\}$ 为标准 Wiener 过程，记之为 $\{W(t); t \in \mathcal{R}\}$. 易知

$$\{Z(t); t \in \mathcal{R}\}\text{与}$$
$$\left\{\int_{\mathcal{R}} \frac{1}{K_\alpha}\{|x-t|^{(2\alpha-1)/2} - |x|^{(2\alpha-1)/2}\}\, dW(x); t \in \mathcal{R}\right\}\text{同分布,}$$

其中 $K_\alpha^2 = \int_{\mathcal{R}} \left(|x-1|^{(2\alpha-1)/2} - |x|^{(2\alpha-1)/2}\right)^2 dx$, 且 $\alpha = 1/2$ 时，${K_\alpha}^{-1}\{|x-t|^{(2\alpha-1)/2} - |x|^{(2\alpha-1)/2}\}$ 被视作 $I_{(0,t]}$. 从而，这样一个分数 Wiener 过程 $\{Z(t); t \in \mathcal{R}\}$ 存在且可以写成

$$Z(t) = \int_{\mathcal{R}} \frac{1}{K_\alpha}\{|x-t|^{(2\alpha-1)/2} - |x|^{(2\alpha-1)/2}\}\, dW(x), \quad t \in \mathcal{R}.$$

分数 Wiener 过程是 Wiener 过程直接而简单的推广，它是由 Mandelbrot 和 Van Ness (1968) 引入的，至今它在计量经济学、金融统计和管理科学中有着重要而广泛的应用. 例如，它在粮食产量趋势预测、新增固定资产分析、国民收入分析、股票收益、长程相关统计及 α 指数计算、分数阶 ARIMA 模型及其在价格指数预测的应用等等领域中都起着重要的作用. 分数 Wiener 过程保持了 Wiener 过程的许多性质，例如，连续性 (由定理 2.1.3), 增量的平稳性等等. 但是，除非它本身是一个 Wiener 过程，即 $\alpha = 1/2$ 的情形，它不再具有独立增量性. 在这一节，我们感兴趣的是它的

连续模和大增量的极限性质. 由于 $\{Z(t);t\le 0\}$ 与 $\{Z(t);t\ge 0\}$ 同分布, 我们只要考察 $\{Z(t);t\ge 0\}$ 即可.

2.2.1 $Z(\cdot)$ 的连续模

以下叙述 Lévy 形式的连续模 (洪圣岩 1990).

定理 2.2.1 我们有

$$\lim_{h\to 0}\sup_{0\le t\le 1-h}\frac{|Z(t+h)-Z(t)|}{\{2\sigma^2(h)\log h^{-1}\}^{1/2}}$$
$$=\lim_{h\to 0}\sup_{0\le t\le 1-h}\sup_{0\le s\le h}\frac{|Z(t+s)-Z(t)|}{\{2\sigma^2(h)\log h^{-1}\}^{1/2}}=1\quad \text{a.s.}\quad (2.2.1)$$

这里和书中的余下部分, 除非特别说明, $\log x$ 表示 $\log(x\vee e)$.

论证定理 2.2.1 之前, 我们要证明一个引理. 首先, 我们引入拟增, 拟降和正则变化 (正变) 函数的概念.

定义 2.2.1 一个 (a,b) 上的函数 $f(x)$ 称为是拟增 (拟降) 的, 如果存在正常数 C_0 使得

$$f(x)\le C_0 f(y)\quad \forall\, a<x<y<b,$$
$$(f(x)\ge C_0 f(y)\quad \forall\, a<x<y<b).$$

定义 2.2.2 一个函数 $f(x)$ 称为在 0 点 (无穷处) 以正指数 α 正则变化, 如果

$$\lim_{s\to 0} f(\theta s)/f(s)=\theta^{\alpha}\quad \forall\,\theta>0\qquad (\lim_{s\to\infty} f(\theta s)/f(s)=\theta^{\alpha}\quad \forall\,\theta>0).$$

易知一个 $[0,1]$ ($[0,\infty)$) 上的函数 $f(x)$ 在 0 点 (无穷处) 以指数 α 正则变化, 则 $f(s)/s^{\alpha/2}$ 为 $[0,1]$ ($[1,\infty)$) 上的拟增函数.

引理 2.2.1 假设 $\{X(t);t\ge 0\}$ 为一个可分的 Gauss 过程满足

$$E(X(t)-X(s))^2\le \Lambda^2(|t-s|),$$

其中 $\Lambda(x)$ 为非降连续函数，使得对某 $\alpha > 0$ 和 $h_0 > 0$, $\Lambda(x)/x^\alpha$ 在 $(0, h_0)$ 上拟增. 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正常数 C_1, C_2 使得对任何 $x \geq C_1$, $0 < h \leq h_0$ 和 $T > h$ 成立

$$P\Big\{\sup_{0\leq t\leq t'\leq T}\ \sup_{t'-t\leq h}|X(t')-X(t)| \geq x\Lambda(h)\Big\} \leq C_2\frac{T}{h}e^{-x^2/(2+\varepsilon)}. \tag{2.2.2}$$

证明 由推论 1.1.1, 对任意的 $y \geq \sqrt{1+4\log p}$ 和任何 $0 < \Delta < h_0$, $t \geq 0$ 成立

$$P\Big\{\sup_{0\leq s\leq\Delta}|X(t+s)-X(t)| \geq y\Big(\Lambda(\Delta)+(2+\sqrt{2}) \cdot \int_1^\infty \Lambda\Big(\frac{\Delta}{2}p^{-u^2}\Big)\,du\Big)\Big\} \leq \frac{5}{2}p^2\int_y^\infty e^{-u^2/2}\,du,$$

其中 $p \geq 2$ 为一整数.

因 $\Lambda(x)/x^\alpha$ 在 $(0, h_0)$ 上拟增，所以存在 $c_0 \geq 1$ 使得

$$\Lambda(ht) \leq c_0 t^\alpha \Lambda(h), \quad \forall\, 0 \leq t \leq 1, 0 < h < h_0.$$

从而

$$\int_1^\infty \Lambda\Big(\frac{\Delta}{2}p^{-u^2}\Big)\,du \leq c_0\Lambda(\Delta)\int_1^\infty p^{-\alpha u^2}\,du \leq c_0\Lambda(\Delta)\frac{2}{\alpha p^\alpha \log p}.$$

因此对 $y \geq \sqrt{1+4\log p}$ 有

$$P\left\{\sup_{0\leq s\leq\Delta}|X(t+s)-X(t)| \geq y\Lambda(\Delta)\Big(1+\frac{8c_0}{\alpha p^\alpha\log p}\Big)\right\} \leq \frac{5}{2}p^2\int_y^\infty e^{-u^2/2}\,du.$$

给定 $0 < \delta < h_0$, 令 $N = (2c_0/\delta)^{1/\alpha}/h$. 注意到 $\Lambda(\frac{1}{N}) \leq c_0(\frac{\delta}{2C_0})\Lambda(h) = \frac{\delta}{2}\Lambda(h)$, 对 $y \geq \sqrt{1+4\log p}$ 我们有

$$P\left\{\sup_{0\le t\le t'\le T}\sup_{t'-t\le h}|X(t')-X(t)|\ge(1+\delta)y\Lambda(h)\Big(1+\frac{8c_0}{\alpha p^\alpha\log p}\Big)\right\}$$
$$\le P\left\{\sup_{0\le i\le[NT]}\sup_{0\le s\le h}\Big|X\Big(\frac{i}{N}+s\Big)-X\Big(\frac{i}{N}\Big)\Big|\right.$$
$$\left.\ge y\Lambda(h)\Big(1+\frac{8c_0}{\alpha p^\alpha\log p}\Big)\right\}+P\left\{\sup_{0\le i\le[NT]}\sup_{0\le s\le 1/N}\Big|X\Big(\frac{i}{N}+s\Big)\right.$$
$$\left.-X\Big(\frac{i}{N}\Big)\Big|\ge\frac{\delta}{2}y\Lambda(h)\Big(1+\frac{8c_0}{\alpha p^\alpha\log p}\Big)\right\}$$
$$\le 2(NT+1)\frac{5}{2}p^2\int_y^\infty e^{-u^2/2}\,du$$
$$\le 5\Big(\Big(\frac{2c_0}{\delta}\Big)^{1/\alpha}+1\Big)\frac{T}{h}p^2\int_y^\infty e^{-u^2/2}\,du.$$

对任意给定的 $\varepsilon>0$, 现在取 $\delta>0$ 充分小和 p 充分大使得 $(1+\delta)$ $(1+\frac{8c_0}{\alpha p^\alpha\log p})\le\sqrt{1+\varepsilon/2}$. 令 $x=y(1+\delta)(1+\frac{8c_0}{\alpha p^\alpha\log p})$, 则

$$P\Big\{\sup_{0\le t\le t'\le T}\sup_{t'-t\le h}|X(t')-X(t)|\ge x\Lambda(h)\Big\}$$
$$\le C_2\frac{T}{h}\int_{\frac{x}{\sqrt{1+\varepsilon/2}}}^\infty e^{-u^2/2}\,du\le C_2\frac{T}{h}e^{-x^2/(2+\varepsilon)}$$

对 $x\ge c_1=:2\sqrt{1+4\log p}$ 成立. 引理得证.

现在我们证明定理 2.2.1. 令

$$A_h=\sup_{0\le t\le 1-h}\sup_{0\le s\le h}|Z(t+s)-Z(t)|.$$

由引理 2.2.1, 对充分小的 h 有

$$P\left\{\frac{A_h}{\{2\sigma^2(h)\log h^{-1}\}^{1/2}}\ge 1+\varepsilon\right\}$$
$$\le\frac{c}{h}\exp\Big(-\frac{2(\log h^{-1})(1+\varepsilon)^2}{2+\varepsilon}\Big)\le ch^\varepsilon.$$

取 $A > 1/\varepsilon$, 令 $h = h_n = n^{-A}$. 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\frac{A_{h_n}}{\{2\sigma^2(h_n)\log h_n^{-1}\}^{1/2}} \geq 1+\varepsilon\right\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} cn^{-A\varepsilon} < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理得

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{A_{h_n}}{\{2\sigma^2(h_n)\log h_n^{-1}\}^{1/2}} \leq 1+\varepsilon \quad \text{a.s.}$$

当 $h_{n+1} < h \leq h_n$ 时，有

$$\begin{aligned}\limsup_{h\to 0} \frac{A_h}{\{2\sigma^2(h)\log h^{-1}\}^{1/2}} &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{A_{h_n}}{\{2\sigma^2(h_{n+1})\log h_n^{-1}\}^{1/2}} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{A_{h_n}}{\{2\sigma^2(h_n)\log h_n^{-1}\}^{1/2}} \cdot \frac{\sigma(h_n)}{\sigma(h_{n+1})} \leq 1+\varepsilon \quad \text{a.s.}\end{aligned}$$

从而

$$\limsup_{h\to 0} \frac{A_h}{\{2\sigma^2(h)\log h^{-1}\}^{1/2}} \leq 1 \quad \text{a.s.} \tag{2.2.3}$$

下面我们证明

$$\liminf_{h\to 0} \sup_{0\leq t\leq 1-h} \frac{Z(t+h)-Z(t)}{\{2\sigma^2(h)\log h^{-1}\}^{1/2}} \geq 1 \quad \text{a.s.} \tag{2.2.4}$$

给定 $\varepsilon > 0$ 和 $\delta > 0$, 令 m 为整数使得对 $l \geq m$ 成立 $\frac{1}{2}\big((l+1)^{2\alpha} + (l-1)^{2\alpha} - 2l^{2\alpha}\big) < \delta^2$. 易知对任何 $l \neq k$ 有

$$\begin{aligned}&E\Big(Z\Big(\frac{km+1}{n}\Big) - Z\Big(\frac{km}{n}\Big)\Big)\Big(Z\Big(\frac{lm+1}{n}\Big) - Z\Big(\frac{lm}{n}\Big)\Big) \\ =&\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n}\Big)^{2\alpha}\big((|l-k|m+1)^{2\alpha} + (|l-k|m-1)^{2\alpha} - 2(|l-k|m)^{2\alpha}\big) \\ \leq&\sigma^2\Big(\frac{1}{n}\Big)\delta^2.\end{aligned}$$

定义 $\xi_i = \big(Z(\frac{im+1}{n}) - Z(\frac{im}{n})\big)/\sigma(\frac{1}{n})$, $i = 0,\cdots,[\frac{n}{m}]-1$, 令 τ, η_i $(i = 0,\cdots,[\frac{n}{m}]-1)$ 为独立的零均值正态变量且 $E\eta_i^2 = 1-\delta^2$,

$E\tau^2=\delta^2$. 则 $E\xi_i^2=E(\eta_i+\tau)^2=1$, $E\xi_i\xi_j\le\delta^2=E(\eta_i+\tau)(\eta_j+\tau)$, $i\ne j$. 由 Slepian 引理 (推论 1.2.1) 我们有

$$
\begin{aligned}
&P\left\{\max_{0\le i\le[\frac{n}{m}]-1}\frac{Z(\frac{im+1}{n})-Z(\frac{im}{n})}{\{2\sigma^2(\frac{1}{n})\log n\}^{1/2}}\le 1-3\varepsilon\right\}\\
\le& P\left\{\max_{0\le i\le[\frac{n}{m}]-1}\frac{\eta_i+\tau}{(2\log n)^{1/2}}\le 1-3\varepsilon\right\}\\
\le& P\left\{\max_{0\le i\le[\frac{n}{m}]-1}\eta_i\le(1-2\varepsilon)(2\log n)^{1/2}\right\}+P\{\tau>\varepsilon(2\log n)^{1/2}\}\\
=&\prod_{i=0}^{[\frac{n}{m}]-1}P\left\{N(0,1)\le(1-2\varepsilon)(\frac{2\log n}{1-\delta^2})^{1/2}\right\}\\
&+P\Big\{N(0,1)\ge\frac{\varepsilon}{\delta}(2\log n)^{1/2}\Big\}.
\end{aligned}
$$

取 $\delta>0$ 充分小使得 $\frac{1-2\varepsilon}{\sqrt{1-\delta^2}}<1-\frac{3}{2}\varepsilon$ 且 $\frac{\varepsilon}{\delta}>2$. 由 (1.1.1) 得, 对充分大的 n 有

$$
\begin{aligned}
&P\left\{N(0,1)\le(1-2\varepsilon)\Big(\frac{2\log n}{1-\delta^2}\Big)^{1/2}\right\}\\
&\le P\left\{N(0,1)\le\Big(1-\frac{3}{2}\varepsilon\Big)(2\log n)^{1/2}\right\}\\
&\le 1-\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\le\exp\Big(-\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\Big)
\end{aligned}
$$

和 $P\left\{N(0,1)\ge\frac{\varepsilon}{\delta}(2\log n)^{1/2}\right\}\le n^{-2}$. 我们得

$$
\begin{aligned}
&P\left\{\max_{0\le i\le[\frac{n}{m}]-1}\frac{Z(\frac{im+1}{n})-Z(\frac{im}{n})}{\{2\sigma^2(\frac{1}{n})\log n\}^{1/2}}\le 1-3\varepsilon\right\}\\
&\le\exp\Big(-[\frac{n}{m}]\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\Big)+\frac{1}{n^2}\le\exp\Big(-\frac{1}{2m}n^{\varepsilon}\Big)+\frac{1}{n^2}.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{\max_{0\le i\le[\frac{n}{m}]-1}\frac{Z(\frac{im+1}{n})-Z(\frac{im}{n})}{\{2\sigma^2(\frac{1}{n})\log n\}^{1/2}}\le 1-3\varepsilon\right\}<\infty.
$$

由 Borel-Cantelli 引理得

$$
\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty}\sup_{0\le t\le 1-\frac{1}{n}}\frac{Z(t+\frac{1}{n})-Z(t)}{\{2\sigma^2(\frac{1}{n})\log n\}^{1/2}}\\
&\ge \liminf_{n\to\infty}\max_{0\le i\le[\frac{n}{m}]-1}\frac{Z(\frac{im+1}{n})-Z(\frac{im}{n})}{\{2\sigma^2(\frac{1}{n})\log n\}^{1/2}}\ge 1-3\varepsilon \quad \text{a.s.} \qquad (2.2.5)
\end{aligned}
$$

现考察 $h_{n+1}<h\le h_n$, 其中 $h_n=1/n$, 我们得

$$
\begin{aligned}
&\liminf_{h\to 0}\sup_{0\le t\le 1-h}\frac{Z(t+h)-Z(t)}{\{2\sigma^2(h)\log h^{-1}\}^{1/2}}\\
&\ge \liminf_{n\to\infty}\sup_{0\le t\le 1-\frac{1}{n+1}}\frac{Z(t+\frac{1}{n+1})-Z(t)}{\{2\sigma^2(\frac{1}{n+1})\log(n+1)\}^{1/2}}\\
&\quad\cdot\frac{\{2\sigma^2(\frac{1}{n+1})\log(n+1)\}^{1/2}}{\{2\sigma^2(\frac{1}{n})\log n\}^{1/2}}\\
&\quad-\limsup_{n\to\infty}\sup_{0\le t\le 1-\frac{1}{n+1}}\sup_{0\le s\le\frac{1}{n(n+1)}}\frac{|Z(t+s)-Z(t)|}{\{2\sigma^2(\frac{1}{n})\log n\}^{1/2}},
\end{aligned}
$$

其中, 由 (2.2.3), 后一个随机变量 $\overset{\text{a.s.}}{=} o(1)$, 由 (2.2.5), 前一个随机变量 $\ge 1-3\varepsilon$ a.s. 从而 (2.2.4) 得证.

2.2.2 $Z(\cdot)$ 的增量有多大?

在定理 2.2.1 中我们看到, 当 h 充分小时, 分数 Wiener 过程 $Z(\cdot)$ 在 $[0,1]$ 中以长度为 h 的子区间上的增量有多大. 下述定理 2.2.2 研究当 $T\to\infty$ 时, 分数 Wiener 过程在 $[0,T]$ 中以 a_T 为长度的子区间上的增量有多大, 其中 a_T 为 T 的不减函数.

定理 2.2.2 (Ortega 1984) 设 a_T $(0<a_T\le T)$ 为 T 的函数满足

(i) a_T 非降,

(ii) T/a_T 非降.

则

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\sup_{0\le s\le a_T}\beta_T|Z(t+s)-Z(t)|\\
&\quad=\limsup_{T\to\infty}\beta_T|Z(T+a_T)-Z(T)|=1 \quad \text{a.s.} \qquad (2.2.6)
\end{aligned}
$$

其中

$$\beta_T = \{2\sigma^2(a_T)(\log T/a_T + \log\log T)\}^{-1/2}.$$

若还有

(iii) $\lim_{T\to\infty}(\log T/a_T)(\log\log T)^{-1} = \infty$,

则

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\sup_{0\le s\le a_T}\beta_T|Z(t+s)-Z(t)|\\&\quad=\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\beta_T|Z(t+a_T)-Z(T)|=1\quad \text{a.s.}\quad (2.2.7)\end{aligned}$$

证明见 Ortega(1984) 或林正炎、陆传荣 (1992).

还有另一类增量，即滞后增量. Wiener 过程 $W(\cdot)$ 的滞后增量是由 Hanson 和 Russo (1983a, b) 引入并研究的，其推广的结果可以参看 Chen, Kong 和 Lin (1986). 下述定理是关于分数 Wiener 过程 $Z(\cdot)$ 滞后增量的结果.

定理 2.2.3 我们有

$$\begin{aligned}&\limsup_{T\to\infty}\sup_{0<t\le T}|Z(T)-Z(T-t)|/d(T,t)\\&\quad=\limsup_{T\to\infty}\sup_{0<t\le T}\sup_{t\le s\le T}|Z(s)-Z(s-t)|/d(T,t)\\&\quad=\limsup_{T\to\infty}\sup_{0<t\le T}\sup_{0\le s\le t}|Z(s)-Z(T-s)|/d(T,t)=1\ \text{a.s.}\quad (2.2.8)\end{aligned}$$

其中 $d(T,t) = \{2\sigma^2(t)(\log T/t + \log\log t)\}^{1/2}$.

定理 2.2.3 由陆传荣 (1986) 和洪圣岩 (1990) 得到，其证明与 Wiener 过程的类似, 这里从略, 读者可参看林正炎和陆传荣 (1992, p. 10).

注 2.2.1 对分数 Wiener 过程 $\{Z(t); t \ge 0\}$, 我们也有与 Wiener 过程一样的增量一般形式, 王文胜 (1997) 证明了：设 $\{Z(t); t\ge 0\}$ 是阶为 α $(0<\alpha<1)$ 的分数 Wiener 过程， a_T, b_T, c_T 是 T 的非负函数，满足

(i) $a_T + b_T \geq T$ 且对充分大的 T, $c_T \geq T$,

(ii) 存在常数 A 使得对任一 $T \geq 1$ 有

$$b_T - b_{T-1} \leq A a_T, \qquad a_T + b_T \leq A(a_{T-1} + b_{T-1}).$$

那么

$$\limsup_{T\to\infty} \sup_{0\leq t} \sup_{0<s} \sup_{0\leq r\leq s} \frac{|Z(t+r) - Z(t)|}{d(t + s \vee c_T, s)} = 1 \quad \text{a.s.},$$

$$\limsup_{T\to\infty} \beta(a_T + b_T, a_T)|Z(a_T + b_T) - Z(b_T)| = 1 \quad \text{a.s.},$$

其中 $\beta(M, m) = \{2\sigma^2(m)(\log(M/m) + \log\log M)\}^{-1/2}$. 进一步,若对任意的 $0 \leq \epsilon < 1$ 有

$$\sum_{N=1}^{\infty} \exp\left\{ - b_N \Big/ \left(a_N^{\epsilon}\big((a_N + b_N)\log(a_N + b_N)\big)^{1-\epsilon}\right)\right\} < \infty,$$

$$\lim_{T\to\infty} b_T/b_{[T]} = \lim_{T\to\infty} a_T/a_{[T]} = 1,$$

那么

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{0\leq t} \sup_{0<s} \sup_{0\leq r\leq s} \frac{|Z(t+r) - Z(t)|}{d(t + s \vee c_T, s)} = 1 \quad \text{a.s.},$$

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{0\leq t\leq b_T} \beta(t + b_T, a_T)|Z(t + a_T) - Z(t)| = 1 \quad \text{a.s.}$$

2.2.3 $Z(\cdot)$ 大增量的下极限性质

在定理 2.2.2 中, 我们看到, 当条件 (iii) 满足时, $Z(\cdot)$ 在 $[0, T]$ 中长度为 a_T 的子区间上的增量的上极限与其对应的下极限相等. 但是, 当条件 (iii) 不满足时, 上极限不再与其对应的下极限相等, 那么下极限如何呢? 回答这个问题的下述一般性结果是由 Zhang (1996a) 得到的.

定理 2.2.4 设 a_T $(0 < a_T \leq T)$ 为 T 的函数, 满足条件 (i), (ii) 和

(iv) $\lim_{T\to\infty}(T/a_T)/\log\log T = \infty$.

则

$$\liminf_{T\to\infty}\gamma(T)\sup_{0\le t\le T-a_T}\sup_{0\le s\le a_T}|Z(t+s)-Z(t)|$$
$$=\liminf_{T\to\infty}\gamma(T)\sup_{0\le t\le T-a_T}|Z(t+a_T)-Z(t)|=1 \quad \text{a.s.} \tag{2.2.9}$$

其中 $\gamma(T)=\{2\sigma^2(a_T)(\log T/a_T-\log\log\log T)\}^{-1/2}$.

若条件 (iv) 由下述条件代替

(iv′) $\lim_{T\to\infty}(T/a_T)/\log\log T=0$,

则存在两个只依赖于 α 的常数 $c_1=c_1(\alpha)$, $c_2=c_2(\alpha)$ 使得

$$c_1\le\liminf_{T\to\infty}\gamma'(T)\sup_{0\le t\le T-a_T}\sup_{0\le s\le a_T}|Z(t+s)-Z(t)|\le c_2 \quad \text{a.s.} \tag{2.2.10}$$

其中

$$\gamma'(T)=\left\{a_T\log\left(1+\frac{T}{a_T\log\log T}\right)\right\}^{-\alpha}.$$

由定理 2.2.4, 我们可以得到下面两个简单的推论.

推论 2.2.1 设 a_T $(0<a_T\le T)$ 为 T 的函数满足条件 (i), (ii) 和

(v) $\lim_{T\to\infty}(\log(T/a_T))/\log\log\log T=\infty$.

则

$$\liminf_{T\to\infty}\gamma_1(T)\sup_{0\le t\le T-a_T}\sup_{0\le s\le a_T}|Z(t+s)-Z(t)|$$
$$=\liminf_{T\to\infty}\gamma_1(T)\sup_{0\le t\le T-a_T}|Z(t+a_T)-Z(t)|=1 \quad \text{a.s.} \tag{2.2.11}$$

其中 $\gamma_1(T)=\{2\sigma^2(a_T)\log(T/a_T)\}^{-1/2}$.

推论 2.2.2 设 a_T $(0<a_T\le T)T$ 的函数满足条件 (i), (ii) 和

(iii′) $\lim_{T\to\infty}(\log(T/a_T))/\log\log T=r$.

则

$$\begin{aligned}&\liminf_{T\to\infty}\beta_T\sup_{0\le t\le T-a_T}\sup_{0\le s\le a_T}|Z(t+s)-Z(t)|\\=&\liminf_{T\to\infty}\beta_T\sup_{0\le t\le T-a_T}|Z(t+a_T)-Z(t)|=\left(\frac{r}{r+1}\right)^{1/2}\quad \text{a.s.}\end{aligned}\tag{2.2.12}$$

其中当 $r=\infty$ 时, $\frac{r}{r+1}=1$.

注 2.2.2 推论 2.2.1 首先是由 Csáki 和 Révész (1979) 对 Wiener 过程得到的. 推论 2.2.2 由洪圣岩 (1990) 得到. 由定理 2.2.4, 我们看到 $\{Z(t)\}$ 增量的下极限性质随 $(T/a_T)/\log\log T$ 的极限不同而不同. 但是, 定理 2.2.2 告诉我们, 它对应的上极限是一致的.

为证定理 2.2.4, 先要叙述一些引理. 在本节的余下部分中, c_α 表示只依赖于 α 的常数, 其取值在不同的地方可以不同.

首先, 假设 $\{X(t);t\in T\}$ 为一个零均值 Gauss 过程, $x(t)>0$ 为 T 上的实值函数. 如果存在一个 Gauss 过程 $\{U(t);t\in T_c\}$ 和 T_c 上的实值函数 $u(t)>0$, 其中 T_c 为可数集, 使得

$$\left\{\sup_{t\in T}\frac{|X(t)|}{x(t)}\le 1\right\}\supset\left\{\sup_{t\in T_c}\frac{|U(t)|}{u(t)}\le 1\right\}\quad \text{a.s.},$$

则由 Kahatri-Šidák 不等式 (定理 1.2.4′) 得

$$P\left\{\sup_{t\in T}\frac{|X(t)|}{x(t)}\le 1\right\}\ge\prod_{t\in T_c}P\left\{\frac{|U(t)|}{u(t)}\le 1\right\}=:p_X.$$

如果这样的 $\{U(t);t\in T_c\}$ 和 $u(t)$ 存在, 并且进一步假设对每个 $t\in T_c$, $U(t)$ 为某个 $X(s_1),\cdots,X(s_m)$ ($s_1,\cdots,s_m\in T$) 的线性组合, 则下界 p_X 称为 $P\left\{\sup_{t\in T}\frac{|X(t)|}{x(t)}\le 1\right\}$ 的一个 KS 下界 (KSLB), 记作

$$P\left\{\sup_{t\in T}\frac{|X(t)|}{x(t)}\le 1\right\}\overset{\text{KS}}{\ge}p_X.$$

另外，如果 $\{Y(s); s\in S\}$ 为另一个零均值 Gauss 过程， $y(s)>0$ 为 S 上的实值函数，则不等式

$$P\left\{\sup_{t\in T}\frac{|X(t)|}{x(t)}\le 1\right\}\overset{\text{KS}}{\ge} P\left\{\sup_{s\in S}\frac{|Y(s)|}{y(s)}\le 1\right\}$$

意味着 $P\left\{\sup_{s\in S}\frac{|Y(s)|}{y(s)}\le 1\right\}$ 的一个 KS 下界 p_Y 也是 $P\left\{\sup_{t\in T}\frac{|X(t)|}{x(t)}\le 1\right\}$ 的一个 KS 下界.

下述引理是 Khatri-Šidák 不等式 (定理 1.2.4′) 的直接推论.

引理 2.2.2 设 T_i, $i=1,2,\cdots$, 为参数集, $\{Y_i(t); t\in T_i, i=1,2,\cdots\}$ 为联合零均值 Gauss 过程. 假设

$$P\left\{\sup_{t\in T_i}\frac{|Y_i(t)|}{x_i(t)}\le 1\right\}\overset{\text{KS}}{\ge} p_i \quad i=1,2,\cdots.$$

则

$$P\left\{\sup_{i}\sup_{t\in T_i}\frac{|Y_i(t)|}{x_i(t)}\le 1\right\}\overset{\text{KS}}{\ge}\prod_{i=1}^{\infty}p_i,$$

其中 $x_i(t)>0$, $t\in T_i$, $i=1,2,\cdots$.

下述引理是 Révész (1982) 的引理 2.3 的一个类比. 但 Révész 的证明似乎有误, 因为其引理 2.3 的下界不能像证明其引理 2.2 那样由 Slepian 引理得到.

引理 2.2.3 设 $\{\Gamma(t); -\infty<t<\infty\}$ 为一个几乎处处连续的零均值 Gauss 过程. 假设存在一个 $[0,\infty)$ 上的非降的函数 $u(h)$ 使得

$$E(\Gamma(t+h)-\Gamma(t))^2\le u^2(h)\quad \forall t\ge 0, h\ge 0.$$

则对任何 $x\ge 0.68$, $T>0$, $a>0$ 和 $k\ge 1$ 有

$$P\Big\{\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le a}|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)|\le x(u(a)+u(a,k)+u^*(a,k))\Big\}$$
$$\overset{\text{KS}}{\ge}\exp\Big(-\frac{76}{\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{T}{a}+1\Big)2^{2k}x^{-1}\exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)\Big),$$

其中
$$u(a,k)=u\Big(\frac{2a}{2^k}\Big)+2\sum_{j=0}^{\infty}u(a2^{-k-j-1}),$$
$$u^*(a,k)=2\sum_{j=0}^{\infty}\sqrt{j}u(a2^{-k-j-1}).$$

证明 对任意的正数 t 和正整数 k, 记 $R=2^k$, $t_j=a[t\frac{2^j}{a}]/2^j$. 则我们有

$$|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)|$$
$$\le|\Gamma((t+s)_k)-\Gamma(t_k)|+|\Gamma(t+s)-\Gamma((t+s)_k)|+|\Gamma(t)-\Gamma(t_k)|$$
$$\le|\Gamma((t+s)_k)-\Gamma(t_k)|+\sum_{j=0}^{\infty}|\Gamma((t+s)_{k+j+1})-\Gamma((t+s)_{k+j})|$$
$$+\sum_{j=0}^{\infty}|\Gamma(t_{k+j+1})-\Gamma(t_{k+j})|.$$

显然有

$$\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le a(1-1/R)}|(t+s)_k-t_k|\le a,$$
$$\sup_{0\le t\le T}\sup_{a(1-1/R)\le s\le a}|(t+s)_k-(t+a(1-1/R))_k|\le 2a2^{-k},$$
$$\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le a}|(t+s)_{k+j+1}-(t+s)_{k+j}|\le a2^{-k-j-1},$$
$$\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le a}|\Gamma((t+s)_k)-\Gamma(t_k)|$$
$$\le\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le a(1-1/R)}|\Gamma((t+s)_k)-\Gamma(t_k)|$$
$$+\sup_{0\le t\le T}\sup_{a(1-1/R)\le s\le a}|\Gamma((t+s)_k)-\Gamma((t+a(1-1/R))_k)|$$

和

$$\text{Card}\{\Gamma((t+s)_k)-\Gamma(t_k):\quad 0\le t\le T,$$
$$0\le s\le a(1-1/R)\}\le 2R^2\Big(\frac{T}{a}+1\Big),$$
$$\text{Card}\{\Gamma((t+s)_k)-\Gamma((t+a(1-1/R)_k):\quad 0\le t\le T,$$
$$a(1-1/R)\le s\le a\}\le 2R\Big(\frac{T}{a}+1\Big),$$
$$\text{Card}\{\Gamma((t+s)_{k+j+1})-\Gamma((t+s)_{k+j}):\quad 0\le t\le T,\quad 0\le s\le a\}$$
$$\le 2^{2+j+1}(\frac{T}{a}+1),$$
$$\text{Card}\{\Gamma(t_{k+j+1})-\Gamma(t_{k+j+1}):\quad 0\le t\le T\}\le 2^{k+j+1}\Big(\frac{T}{a}+1\Big).$$

由引理 2.2.2, 我们有

$$J:=P\Big\{\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le a}|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)|\le xu(a)+xu(2a/R)$$
$$+\sum_{j=0}^{\infty}2x_ju(a2^{-k-j-1})\Big\}$$
$$\overset{\text{KS}}{\ge}P\Big\{\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le a(1-1/R)}|\Gamma((t+s)_k)-\Gamma(t_k)|\le xu(a)\Big\}$$
$$\cdot P\Big\{\sup_{0\le t\le T}\sup_{a(1-1/R)\le s\le a}|\Gamma((t+s)_k)-\Gamma((t+a(1-1/R))_k)|$$
$$\le xu(2a/R)\Big\}\cdot\prod_{j=0}^{\infty}P\Big\{\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le a}|\Gamma((t+s)_{k+j+1})$$
$$-\Gamma((t+s)_{k+j})|\le x_ju(a2^{-k-j-1})\Big\}$$
$$\cdot\prod_{j=0}^{\infty}P\Big\{\sup_{0\le t\le T}|\Gamma(t_{k+j+1})-\Gamma(t_{k+j})|\le x_ju(a2^{-k-j-1})\Big\}$$
$$\overset{\text{KS}}{\ge}(\psi(x))^{2R^2(\frac{T}{a}+1)}(\psi(x))^{2R(\frac{T}{a}+1)}\prod_{j=0}^{\infty}(\psi(x_j))^{2^{k+j+1}(\frac{T}{a}+1)}$$
$$\cdot\prod_{j=0}^{\infty}(\psi(x_j))^{2^{k+j+1}(\frac{T}{a}+1)}=$$

$$(\psi(x))^{2(R^2+R)(\frac{T}{a}+1)}\cdot\prod_{j=0}^{\infty}(\psi(x_j))^{4R2^j(\frac{T}{a}+1)},$$

其中 $\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{x}e^{-t^2}dt\geq 1/2\ (x\geq 0.68)$. 因为当 $0\leq y\leq 1/2$ 时, $(1-y)e^{2y}\geq 1$, 对 $x\geq 0.68$ 我们有

$$\psi(x)\geq\exp(-2(1-\psi(x)))\geq\exp(-\frac{4}{\sqrt{2\pi}}x^{-1}e^{-x^2/2}).$$

取 $\frac{1}{2}x_j^2=\frac{1}{2}x^2+j$, 则

$$\begin{aligned}
J\geq&\exp\Big(-\Big(\frac{4}{\sqrt{2\pi}}2(R^2+R)\Big(\frac{T}{a}+1\Big)x^{-1}e^{-\frac{x^2}{2}}\\
&+\frac{4}{\sqrt{2\pi}}4R\Big(\frac{T}{a}+1\Big)\sum_{j=0}^{\infty}2^jx_j^{-1}e^{-\frac{x^2}{2}-j}\Big)\Big)\\
\geq&\exp\Big(-\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{T}{a}+1\Big)x^{-1}e^{-x^2/2}\Big(2R^2+2R+4R\sum_{j=0}^{\infty}2^je^{-j}\Big)\Big)\\
=&\exp\Big(-\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{T}{a}+1\Big)x^{-1}e^{-x^2/2}\Big(2R^2+2R+R\frac{4e}{e-2}\Big)\Big)\\
\geq&\exp\Big(-\frac{76}{\sqrt{2\pi}}x^{-1}e^{-x^2/2}R^2\Big(\frac{T}{a}+1\Big)\Big).
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
&xu(2a/R)+2\sum_{j=0}^{\infty}x_ju(a2^{-k-j-1})\\
&\leq x(u(2a/R)+2\sum_{j=0}^{\infty}u(a2^{-k-j-1}))+2\sum_{j=0}^{\infty}\sqrt{j}u(a2^{-k-j-1})\\
&=xu(a,k)+u^*(a,k),
\end{aligned}$$

引理得证.

引理 2.2.4 设 $\{\Gamma(t);-\infty<t<\infty\}$, $u(h)$ 如引理 2.2.3 所示, 假设对某个 $\alpha>0$, $u(x)/x^{\alpha}$ 拟增. 则存在只依赖于 α 的常数

$c_\alpha > 0$, $c'_\alpha > 1$ 使得对任何 $x \geq c'_\alpha$ 有

$$P\Big\{\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le h}|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)| \le xu(h)\Big\}$$
$$\overset{\text{KS}}{\geq} \exp\big(-c_\alpha(\frac{T}{h}+1)x^{4/\alpha-1}e^{-x^2/2}\big).$$

证明 由于 $u(x)/x^\alpha$ 拟增，存在 $c_0 > 0$ 使得

$$u(ht) \le c_0 t^\alpha u(h) \quad \forall 0 \le t \le 1, h \ge 0.$$

从而

$$u(h,k) \le c_0 u(h)\Big(\Big(\frac{2}{2^k}\Big)^\alpha + 2\sum_{j=0}^{\alpha} 2^{-\alpha(k+j+1)}\Big)$$
$$= c_0 u(h) 2^{-\alpha k}\Big(2^\alpha + \frac{2^{1+\alpha}}{2^\alpha - 1}\Big),$$
$$u^*(h,k) \le 2\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\sqrt{j}\,2^{-\alpha(k+j+1)}\Big)c_0 u(h)$$
$$\le 2c_0 u(h) 2^{-\alpha k}(2\alpha\log 2)^{-3/2}.$$

令 $K_\alpha = c_0(2^\alpha + \frac{2^{1+\alpha}}{2^\alpha-1}) + 2c_0(2\alpha\log 2)^{-3/2}$, 则对任何 $x \ge 1$ 有

$$P\Big\{\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le h}|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)| \le xu(h)(1+2^{-\alpha k}K_\alpha)\Big\}$$
$$\overset{\text{KS}}{\geq} \exp\Big(-\frac{76}{\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{T}{h}+1\Big)2^{2k}x^{-1}e^{-x^2/2}\Big).$$

记 $y = x(1+2^{-\alpha k}K_\alpha)$, 则

$$J := P\Big\{\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le h}|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)| \le yu(h)\Big\}$$
$$\overset{\text{KS}}{\geq} \exp\Big(-\frac{76}{\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{T}{h}+1\Big)y^{-1}e^{-y^2/2}2^{2k}(1+2^{-\alpha k}K_\alpha)$$
$$\cdot\exp\Big(y^2\frac{2\cdot 2^{-\alpha k}K_\alpha + 2^{-2\alpha k}K_\alpha^2}{(1+2^{-\alpha k}K_\alpha)^2}\Big)\Big)$$
$$\ge \exp\left(-\frac{76}{\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{T}{h}+1\Big)y^{-1}e^{-y^2/2}2^{2k}(1+K_\alpha)\exp(3K_\alpha^2 2^{-\alpha k}y^2)\right).$$

现在，对 $y \geq 1 + K_\alpha$, 取 k 使得

$$2^{k-1} \leq y^{2/\alpha} \leq 2^k,$$

则

$$2^{2k}\exp(3K_\alpha^2 2^{-\alpha k}y^2) \leq 4y^{4/\alpha}\exp(3K_\alpha^2).$$

从而

$$J \geq \exp\Big(-\frac{4\times 76}{\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{T}{h}+1\Big)y^{4/\alpha-1}e^{-y^2/2}(1+K_\alpha)\exp(3K_\alpha^2)\Big).$$

引理 2.2.4 得证.

引理 2.2.5 设 $\{Z(t);t \geq 0\}$ 为一个阶为 $\alpha(0 < \alpha \leq 1/2)$ 的分数 Wiener 过程. 则对任意的 $\varepsilon > 0$ 存在 $u_0 = u_0(\varepsilon) > 0$, $T_0 = T_0(\varepsilon) > 0$ 使得对任何 $u \geq u_0$ 和 $T \geq T_0$ 我们有

$$\begin{aligned}P\Big\{\sup_{0\leq t\leq T}(Z(t+1)-Z(t)) \leq u\Big\}\\ \leq \exp\Big(-(1-\varepsilon)H_{2\alpha}\frac{T}{\sqrt{2\pi}}u^{1/\alpha-1}e^{-u^2/2}\Big).\end{aligned}$$

其中 $H_{2\alpha} = \lim_{T\to\infty} T^{-1}\int_0^\infty e^s P(\sup_{0<t<T} Y(t) > s)ds$, $\{Y(t);0 \leq t \leq \infty\}$ 为一非平稳 Gauss 过程, 满足 $Y(0) = 0$ a.s., $EY(t) = -|t|^{2\alpha}$, $\mathrm{Cov}(Y(t_1),Y(t_2)) = |t_1|^{2\alpha} + |t_2|^{2\alpha} - |t_1 - t_2|^{2\alpha}$.

证明 对任何整数 $k < T$ 我们有

$$\begin{aligned}\sup_{0\leq t\leq T}(Z(t+1)-Z(t)) &\geq \max_{0\leq i\leq l}\sup_{i(k+1)\leq t<(i+1)(k+1)}(Z(t+1)-Z(t))\\ &\geq \max_{0\leq i\leq l}\sup_{i(k+1)\leq t<i(k+1)+k}(Z(t+1)-Z(t)),\end{aligned}$$

其中 $l = \max\{i,(i+1)(k+1)-1 \leq T\}$. 注意到 $\alpha \leq 1/2$, 由 Slepian

引理我们有

$$
\begin{aligned}
&P\Big\{\sup_{0\le t\le T}(Z(t+1)-Z(t))\le u\Big\}\\
&\le P\Big\{\max_{0\le i\le l}\sup_{i(k+1)\le t<i(k+1)+k}(Z(t+1)-Z(t))\le u\Big\}\\
&\le \Big(P\Big\{\sup_{0\le t\le k}(Z(t+1)-Z(t))\le u\Big\}\Big)^{l+1}.
\end{aligned}
$$

由定理 1.1.2, 得

$$
\lim_{x\to\infty}\frac{P\{\sup_{0\le t\le k}(Z(t+1)-Z(t))>x\}}{\dfrac{k}{\sqrt{2\pi}}x^{1/\alpha-1}e^{-x^2/2}}=H_{2\alpha}.
$$

从而

$$
\begin{aligned}
&P\Big\{\sup_{0\le t\le T}(Z(t+1)-Z(t))\le u\Big\}\\
&\le \Big(1-\frac{(1+o(1))H_{2\alpha}}{\sqrt{2\pi}}ku^{1/\alpha-1}e^{-u^2/2}\Big)^{l+1}\\
&\le \exp\Big(-(1+o(1))\frac{k(l+1)H_{2\alpha}}{\sqrt{2\pi}}u^{1/\alpha-1}e^{-u^2/2}\Big)\\
&\le \exp\Big(-(1-\varepsilon)H_{2\alpha}\frac{T}{\sqrt{2\pi}}u^{1/\alpha-1}e^{-u^2/2}\Big)(\forall\, T\ge T_0(\varepsilon),u\ge u_0(\varepsilon)),
\end{aligned}
$$

引理 2.2.5 证毕.

引理 2.2.6 设 $\{Z(t);t\ge 0\}$ 为阶为 α 的分数 Wiener 过程且 $1/2<\alpha<1$. 则对任何 $\delta>0$, 存在 $c_\alpha=c(\alpha,\delta)>0$, 使得对充分大的 T, k $(k\le T)$ 和任何 $u>0$ 有

$$
\begin{aligned}
&P\Big\{\sup_{0\le t\le T}|Z(t+1)-Z(t)|\le u\Big\}\\
&\qquad\le \exp\Big(-c_\alpha\frac{T}{k}\frac{1}{u}\exp\Big(-\frac{(1+\delta)u^2}{2}\Big)\Big).
\end{aligned}
$$

证明 设 $Y(t)=Z(t+1)-Z(t)$, 则

$$\begin{aligned}EY(t+h)Y(t)&=E(Z(t+h+1)-Z(t+h))(Z(t+1)-Z(t))\\&=\frac{1}{2}(|h+1|^{2\alpha}+|h-1|^{2\alpha}-2h^{2\alpha})=:\rho(h).\end{aligned}$$

易知 $\rho(h)$ 在 $[0,\infty)$ 上严格递减, 在 $[1,\infty)$ 上为凸函数, 且 $\rho(0)=1$, $\rho(h)\approx h^{2\alpha-2}\ (h\to\infty)$.

对 $k>1$ (充分大), 令 $t_i=ik$, $i=0,1,2,\cdots$, $Y(t_{-1})=0$,

$$a_{ij}=E(Y(t_i)-Y(t_{i-1}))(Y(t_j)-Y(t_{j-1})),\quad i,j\geq 0.$$

则

$$\begin{aligned}&a_{ij}=2\rho(|i-j|k)-\rho(|i-j+1|k)-\rho(|i-j-1|k),\quad i,j\geq 1;\\&a_{ii}=2(1-\rho(k)),\quad i\geq 1,\quad a_{00}=1;\\&a_{i0}=a_{0i}=\rho(ik)-\rho((i-1)k),\quad i\geq 1.\end{aligned}$$

从而, 当 $i,j\geq 1$, $|i-j|\geq 2$ 时, 由 $\rho(h)$ 在 $[1,\infty)$ 的凸性, 我们有 $a_{ij}<0$; 当 $i,j\geq 1$, $|i-j|=1$ 时, 因为 $\rho(h)\to 0\ (h\to\infty)$, 我们对充分大的 k 有 $a_{ij}=2\rho(k)-\rho(2k)-1<0$; 当 $i\geq 1$ 时, 由 $\rho(h)$ 的单调性, 我们有 $a_{i0}<0$.

现对任何 $n\geq 2$ 和 $1\leq i\leq n$, 令

$$S_i^n=\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|=a_{ii}-\sum_{j=0}^{n}a_{ij}.$$

则对 $i\geq 1$ 有

$$\begin{aligned}S_i^n=&2(1-\rho(k))-E\big((Y(t_i)-Y(t_{i-1}))Y(t_n)\big)\\=&2(1-\rho(k))-\rho((n-i)k)+\rho((n-i+1)k)<2(1-\rho(k))\\=&a_{ii};\\S_i^i=&1-\rho(k)=\frac{1}{2}a_{ii};\end{aligned}$$

对 $i=0$ 有,

$$S_0^n = \sum_{\substack{j=0\\ j\neq 0}}^{n} |a_{0j}| = \sum_{j=1}^{n}(\rho((j-1)k)-\rho(jk)) = 1-\rho(nk) < 1 = a_{00};$$

$$S_0^0 = 0 < \frac{1}{2}a_{00}.$$

注意到 $A=(a_{ii})$ 为 $\big(Y(t_0)-Y(T_{-1}),\cdots,Y(t_n)-Y(t_{n-1})\big)$ 的协方差矩阵, 与推论 1.2.6 的证明类似, 我们有

$$\begin{aligned}
&P\Big\{\sup_{0\le i\le n}|Y(t_i)|\le u\Big\} = P\Big\{\sup_{0\le i\le n}|Y(t_i)-Y(t_{-1})|\le u\Big\}\\
&\le \prod_{i=0}^{n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{2}u/a_{ii}^{1/2}} e^{-x^2/2}dx \le \prod_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{2}u/a_{ii}^{1/2}} e^{-x^2/2}dx\\
&= \prod_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{u/\sqrt{1-\rho(k)}} e^{-x^2/2}dx\\
&\le \prod_{i=1}^{n}\exp\Big(-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{u/\sqrt{1-\rho(k)}}^{\infty} e^{-x^2/2}dx\Big)\\
&\le \exp\Big(-\frac{\sqrt{1-\rho(k)}}{\sqrt{2\pi}}\cdot n\cdot\frac{1}{u}\exp\Big(-\frac{u^2}{2(1-\rho(k))}\Big)\Big).
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
&P\Big\{\sup_{0\le t\le T}|Z(t+1)-Z(t)|\le u\Big\} \le P\Big\{\sup_{0\le i\le T/k}|Y(t_i)|\le u\Big\}\\
&\qquad\le \exp\Big(-\frac{\sqrt{1-\rho(k)}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{T}{k}\cdot\frac{1}{u}\exp\Big(-\frac{u^2}{2(1-\rho(k))}\Big)\Big).
\end{aligned}$$

因此引理 2.2.6 得证.

引理 2.2.7 存在 $c_\alpha>0$ 使得对任何 $0<x<1$, $T>0$ 成立

$$P\Big\{\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le 1}|Z(t+s)-Z(t)|\le x^\alpha\Big\} \le \exp\Big(-c_\alpha\frac{T}{x}\Big).$$

当 $0<\alpha\le 1/2$ 时，可选取 $c_\alpha=-\log\phi(1)<0.18$; 当 $1/2<\alpha<1$ 时，可选取 $c_\alpha=-\frac{1}{2}\log\phi(1/\sqrt{1-4^{\alpha-1}})$.

证明 令 $\xi_i=Z((i+1)x)-Z(ix)$, $\eta_i=\xi_{2i}-\xi_{2i-1}$. 则

$$\begin{aligned}
&P\Big\{\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le 1}|Z(t+s)-Z(t)|\le x^\alpha\Big\}\\
&\quad\le P\Big\{\sup_{0\le i<T/x}\sup_{0\le s\le 1}|Z(ix+s)-Z(ix)|\le x^\alpha\Big\}\\
&\quad\le P\Big\{\sup_{0\le i<T/x}|Z((i+1)x)-Z(ix)|\le x^\alpha\Big\}\\
&\quad\le P\Big\{\sup_{0\le i<T/x}\xi_i\le x^\alpha\Big\}.
\end{aligned}$$

当 $0<\alpha\le 1/2$ 时，我们有 $E\xi_i\xi_j\le 0$, $i\ne j$. 由 Slepian 引理 (推论 1.2.1) 得

$$\begin{aligned}
&P\Big\{\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le 1}|X(t+s)-X(t)|\le x^\alpha\Big\}\\
&\quad\le(\phi(1))^{T/x}=\exp\Big(\frac{T}{x}\log\phi(1)\Big).
\end{aligned}$$

当 $1/2<\alpha<1$ 时，我们有 $E\eta_i^2=(4-4^\alpha)x^{2\alpha}$,

$$\begin{aligned}
E\eta_i\eta_j=&\frac{1}{2}\{4(2|j-i|-1)^{2\alpha}+4(2|j-i|+1)^{2\alpha}-(2|j-i|-2)^{2\alpha}\\
&-(2|j-i|+2)^{2\alpha}-6(2|j-i|)^{2\alpha}\}x^{2\alpha}\le 0
\end{aligned}$$

对 $j\ne i$ 成立. 从而由 Slepian 引理得

$$\begin{aligned}
&P\Big\{\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le 1}|Z(t+s)-Z(t)|\le x^\alpha\Big\}\\
&\quad\le P\Big\{\sup_{0\le i<\frac{1}{2}\frac{T}{x}}|\eta_i|\le 2x^\alpha\Big\}\le P\Big\{\sup_{0\le i<\frac{1}{2}\frac{T}{x}}\eta_i\le 2x^\alpha\Big\}\\
&\quad\le\Big(\phi\Big(\frac{2}{\sqrt{4-4^\alpha}}\Big)\Big)^{T/(2x)}=\exp\Big(\frac{1}{2}\log\phi\Big(\frac{1}{\sqrt{1-4^{\alpha-1}}}\Big)\frac{T}{x}\Big).
\end{aligned}$$

引理 2.2.7 得证.

令 $T_n = e^{n^p}$ $(p>1)$, $d_n = ne^{n^p}$, $A_n = (\frac{d_{n-1}}{T_n}, \frac{d_n}{T_n})$,

$$Y_n(t) = \int_{|x|\notin A_n} \frac{1}{K_\alpha}\{|x-t|^{(2\alpha-1)/2} - |x|^{(2\alpha-1)/2}\}dW(x). \quad (2.2.13)$$

下述引理给出了 $Y_n(\cdot)$ 的方差的估计.

引理 2.2.8 设 $0<\alpha<1$, $\gamma>0$, $p>1$. 则存在只依赖于 α, γ, p 的常数 $c\in(0,\infty)$ 使得对 $n>2$, $0\le t\le n/2$ 和 $0<h\le 1$ 一致地有,

$$\sigma_n^2(t,h) = E(Y_n(t+h)-Y_n(t))^2 \le ch^{2\alpha}(\log h^{-1})^\gamma n^{-\delta},$$

其中 $\delta = \min((2-2\alpha), (p-1)/2, \gamma(p-1)/2)$.

证明 若 $0<\alpha<1, \alpha\ne 1/2$, 令

$$f^2(y) = \frac{1}{K_\alpha^2}(|y-1/2|^{(2\alpha-1)/2} - |y+1/2|^{(2\alpha-1)/2})^2, -\infty<y<\infty.$$

则 $\int_R f^2(y)dy = 1$ 且在 $[0,\infty)$ 上有 $f^2(y)\le 1/K_\alpha^2$. 交换积分变量得

$$\sigma_n^2(t,h) = h^{2\alpha}\int_{|y+t/h+1/2|\notin A_n/h} f^2(y)dy.$$

由 $|y+t/h+1/2|\notin A_n/h$ 得

$$|y+t/h+1/2|\ge n/h \quad 或 \quad |y+t/h+1/2|\le \frac{d_{n-1}}{T_n}/h.$$

当 $|y+t/h+1/2|\ge n/h$ 时, 注意到 $0\le t\le \frac{1}{2}n$ 我们有

$$y+1/2\ge n/(2h) \text{ 或 } y+1/2\le -n/h.$$

从而对 $n>2$ 有

$$\int_{|y+t/h+1/2|\ge n/h} f^2(y)dy \le \int_{n/(2h)}^\infty f^2(y)dy + \int_{n/(4h)}^\infty f^2(y)dy$$
$$\le 2\int_{n/(4h)}^\infty f^2(y)dy \le c\int_{n/(4h)}^\infty y^{2\alpha-3}dy \le ch^{2-2\alpha}n^{-(2-2\alpha)}.$$

现设

$$|y+t/h+1/2| \le \frac{d_{n-1}}{T_n}/h.$$

因为 $f^2(y) \le 1/K_\alpha^2$, 我们有

$$\int_{-1/2-(\frac{d_{n-1}}{T_n}+t)/h}^{-1/2+(\frac{d_{n-1}}{T_n}-t)/h} f^2(y)dy \le 2\frac{d_{n-1}}{T_n}/(hK_\alpha^2).$$

从而对 $n>2$, 有

$$\sigma_n^2(t,h) \le h^{2\alpha}\Big(ch^{2-2\alpha}n^{-(2-2\alpha)} + 2\frac{d_{n-1}}{T_nhK_\alpha^2}\Big).$$

如果 $1 \ge h \ge e^{-n^{(p-1)/2}}$, 则有

$$\begin{aligned}\sigma_n^2(t,h) &\le ch^{2\alpha}(\log h^{-1})^\gamma\Big((\log h^{-1})^{-\gamma}h^{2-2\alpha}n^{-(2-2\alpha)} \\ &\quad + e^{n^{(p-1)/2}}\frac{(n-1)e^{(n-1)^p}}{e^{n^p}}\Big) \\ &\le ch^{2\alpha}(\log h^{-1})^\gamma(n^{-(2-2\alpha)}+n^{-(2-2\alpha)}) \\ &\le ch^{2\alpha}(\log h^{-1})^\gamma n^{-(2-2\alpha)}.\end{aligned}$$

如果 $0<h\le e^{-n^{(p-1)/2}}$, 则有

$$\begin{aligned}\sigma_n^2(t,h) &\le h^{2\alpha} \le ch^{2\alpha}(\log h^{-1})^\gamma(\log e^{n^{(p-1)/2)}})^{-\gamma} \\ &= ch^{2\alpha}(\log h^{-1})^\gamma n^{-\gamma(p-1)/2}.\end{aligned}$$

如果 $\alpha=1/2$, 注意到此时积分核为 $I_{(0,t]}(x)$, 对任何 $h\ge 0$ 和 $n>2$ 有,

$$\begin{aligned}\sigma_n^2(t,h) &= \begin{cases} 0, & 若 t \ge \dfrac{d_{n-1}}{T_n}, \\ \dfrac{d_{n-1}}{T_n}-t, & 若 0\le t\le \dfrac{d_{n-1}}{T_n} < t+h, \\ h, & 若 0\le t\le t+h \le \dfrac{d_{n-1}}{T_n} \end{cases} \\ &\le h\wedge\frac{d_{n-1}}{T_n}.\end{aligned}$$

从而当 $h < d_{n-1}/T_n$ 时,

$$\sigma_n^2(t,h) \le h \le h(\log h^{-1})^\gamma \Big(\log \frac{T_n}{d_{n-1}}\Big)^{-\gamma}$$
$$\le ch(\log h^{-1})^\gamma n^{-\gamma(p-1)/2}.$$

当 $h \ge d_{n-1}/T_n$ 时, 则对 $0 < \gamma \le 1$ 有 $h(\log h^{-1})^\gamma \ge \frac{d_{n-1}}{T_n}\big(\log \frac{T_n}{d_{n-1}}\big)^\gamma$, 因此

$$\sigma_n^2(t,h) \le \frac{d_{n-1}}{T_n} \le h(\log h^{-1})^\gamma \Big(\log \frac{T_n}{d_{n-1}}\Big)^{-\gamma}$$
$$\le ch(\log h^{-1})^\gamma n^{-\gamma(p-1)/2};$$

对 $\gamma > 1$ 我们有 $h(\log h^{-1})^\gamma \ge h\log h^{-1} \ge \frac{d_{n-1}}{T_n} Ln\frac{T_n}{d_{n-1}}$, 所以

$$\sigma_n^2(t,h) \le \frac{d_{n-1}}{T_n} \le h(\log h^{-1})^\gamma \Big(\log \frac{T_n}{d_{n-1}}\Big)^{-1}$$
$$\le ch(\log h^{-1})^\gamma n^{-(p-1)/2}.$$

因此, 在任何情形下都存在一个只依赖于 α, γ, p 的常数 $C \in (0,\infty)$ 使得对 $n > 2$, $0 \le t \le n/2$ 和 $0 < h \le 1$ 一致地有

$$\sigma_n^2(t,h) \le Ch^{2\alpha}(\log h^{-1})^\gamma n^{-\delta},$$

其中 δ 如题设所示.

定理 2.2.4 的证明

证明分四步进行.

第一步 假设条件 (iv) 满足, 则

$$\liminf_{T\to\infty} \gamma(T) \sup_{0\le t\le T-a_T} \sup_{0\le s\le a_T} |Z(t+s)-Z(t)| \le 1 \quad \text{a.s.} \qquad (2.2.14)$$

证明 如果

$$\limsup_{T\to\infty} (\log(T/a_T))/(\log\log\log T) = \infty, \qquad (2.2.15)$$

则存在 $\{T_N\}$ 使得

$$\lim_{N\to\infty}(\log(T_N/a_{T_N}))/(\log\log\log T_N)=\infty. \tag{2.2.16}$$

由引理 2.2.4 得

$$\begin{aligned}
&P\Big\{\Big(2\sigma^2(a_{T_N})\log\frac{T_N}{a_{T_N}}\Big)^{-1/2}\sup_{0\le t\le T_N-a_{T_N}}\sup_{0\le s\le a_{T_N}}\\
&\quad|Z(t+s)-Z(t)|\ge(1+\varepsilon)^{1/2}\Big\}\\
&\quad\le 1-\exp\Big(-c_\alpha\frac{T_N}{a_{T_N}}\Big(2\log\frac{T_N}{a_{T_N}}\Big)^{\frac12(\frac4\alpha-1)}\exp\Big(-(1+\varepsilon)\log\frac{T_N}{a_{T_N}}\Big)\Big)\\
&\quad\le c_\alpha\Big(\log\frac{T_N}{a_{T_N}}\Big)^{2/\alpha-1/2}\Big(\frac{a_{T_N}}{T_N}\Big)^{\varepsilon}\to 0\quad(N\to\infty).
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
&\liminf_{N\to\infty}\Big(2\sigma^2(a_{T_N})\log\frac{T_N}{a_{T_N}}\Big)^{-1/2}\\
&\quad\cdot\sup_{0\le t\le T_N-a_{T_N}}\sup_{0\le s\le a_{T_N}}|Z(t+s)-Z(t)|\le 1\quad\text{a.s.},
\end{aligned}$$

由此和 (2.2.16) 即得证 (2.2.14).

现设

$$\limsup_{T\to\infty}(\log(T/a_T))/(\log\log\log T)<\infty.$$

那么存在常数 $r_0>0$ 使得

$$T/a_T\le(\log\log T)^{r_0}. \tag{2.2.17}$$

令 T_n, d_n, $\{Y_n(t)\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 如引理 2.2.8 所示. 对任何 $\varepsilon>0$, 由引理 2.2.4 和条件 (iv), 对充分大的 n 有

$$\begin{aligned}
&P\Big\{\sup_{0\le t\le T_n-a_{T_n}}\sup_{0\le s\le a_{T_n}}|Z(t+s)-Z(t)|\le(1+\varepsilon)^{1/2}\gamma^{-1}(T_n)\Big\}\\
&\ge\exp\Big(-c_\alpha\frac{T_n}{a_{T_n}}\frac{\big((1+\varepsilon)^{1/2}(2\log\frac{T_n}{a_{T_n}\log\log T_n})^{1/2}\big)^{4/\alpha-1}}{(T_n/a_{T_n})^{1+\varepsilon}}(\log\log T_n)^{1+\varepsilon}\Big)\\
&\ge n^{-2/3}.
\end{aligned}\tag{2.2.18}$$

令

$$X_n(t)=\int_{|x|\in(d_{n-1},d_n)}\frac{1}{K_\alpha}\{|x-t|^{(2\alpha-1)/2}-|x|^{(2\alpha-1)/2}\}dW(x),$$

$$\tilde{X}_n(t)=\int_{|x|\notin(d_{n-1},d_n)}\frac{1}{K_\alpha}\{|x-t|^{(2\alpha-1)/2}-|x|^{(2\alpha-1)/2}\}dW(x). \tag{2.2.19}$$

则 $\{X_n(t)\}, n=1,2,\cdots,$ 相互独立, $Z(t)=X_n(t)+\tilde{X}_n(t)$, 且

$$\begin{aligned}&\{\tilde{X}_n(t+s)-\tilde{X}_n(t);0\le t\le T_n-a_{T_n},0\le s\le a_{T_n}\}\\&\quad\overset{\mathcal{D}}{=}\{T_n^\alpha(Y_n(t+s)-Y_n(t));0\le t\le 1-\frac{a_{T_n}}{T_n},0\le s\le\frac{a_{T_n}}{T_n}\}.\end{aligned}$$

从而由引理 2.2.8, 引理 2.2.4 和 (2.2.17), 对充分大的 n 成立

$$\begin{aligned}J_n:=&P\left\{\sup_{0\le t\le T_n-a_{T_n}}\sup_{0\le s\le a_{T_n}}|\tilde{X}_n(t+s)-\tilde{X}_n(t)|\ge\varepsilon\gamma^{-1}(T_n)\right\}\\=&P\left\{\sup_{0\le t\le 1-\frac{a_{T_n}}{T_n}}\sup_{0\le s\le\frac{a_{T_n}}{T_n}}|Y_n(t+s)-Y_n(t)|\right.\\&\left.\ge\left(\left(\frac{a_{T_n}}{T_n}\right)^\alpha\left(\log\frac{T_n}{a_{T_n}}\right)^{\frac{\gamma}{2}}n^{-\delta/2}\right)\varepsilon n^{\delta/2}\frac{(2\log\frac{T_n}{a_{T_n}\log\log T_n})^{1/2}}{(\log T_n/a_{T_n})^{\frac{\gamma}{2}}}\right\}\\\le&c_\alpha\frac{T_n}{a_{T_n}}\exp\left(-c_{\alpha,\varepsilon}\frac{\log\frac{T_n}{a_{T_n}\log\log T_n}}{(\log T_n/a_{T_n})^\gamma}n^\delta\right)\\\le&c_\alpha(\log\log T_n)^{r_0}\exp\left(-c_{\alpha,\varepsilon}\frac{\log\frac{T_n}{a_{T_n}\log\log T_n}}{(r_0\log\log\log T_n)^\gamma}n^\delta\right)\\\le&c_\alpha(\log n)^{r_0}\exp\left(-c_{\alpha,\varepsilon}\frac{n^\delta}{(\log\log n)^\gamma}\right).\end{aligned}\tag{2.2.20}$$

因此

$$\sum_{n=1}^\infty J_n<\infty. \tag{2.2.21}$$

由 Borel-Cantelli 引理得

$$\limsup_{n\to\infty}\gamma(T_n)\sup_{0\le t\le T_n-a_{T_n}}\sup_{0\le s\le a_{T_n}}|\tilde{X}_n(t+s)-\tilde{X}_n(t)|\le\varepsilon\quad\text{a.s.} \tag{2.2.22}$$

由 (2.2.18) 和 (2.2.21) 得

$$
\begin{aligned}
& P\Big\{\sup_{0\le t\le T_n-a_{T_n}}\sup_{0\le s\le a_{T_n}}|X_n(t+s)-X_n(t)| \\
& \le((1+\varepsilon)^{1/2}+\varepsilon)\gamma^{-1}(T_n)\Big\} \\
& \ge P\left\{\sup_{0\le t\le T_n-a_{T_n}}\sup_{0\le s\le a_{T_n}}|Z(t+s)-Z(t)|\le((1+\varepsilon)^{1/2}\gamma^{-1}(T_n)\right\} \\
& \quad - P\left\{\sup_{0\le t\le T_n-a_{T_n}}\sup_{0\le s\le a_{T_n}}|\tilde{X}_n(t+s)-\tilde{X}_n(t)|\ge\varepsilon\gamma^{-1}(T_n)\right\} \\
& \ge n^{-2/3}-J_n.
\end{aligned}
\tag{2.2.23}
$$

注意到 $\{X_n(t)\}$, $n=1,2,\cdots$, 独立, 由 (2.2.21), (2.2.23) 和 Borel-Cantelli 引理得

$$
\begin{aligned}
& \liminf_{n\to\infty}\gamma(T_n)\sup_{0\le t\le T_n-a_{T_n}}\sup_{0\le s\le a_{T_n}}|X_n(t+s)-X_n(t)| \\
& \qquad \le(1+\varepsilon)^{1/2}+\varepsilon \quad \text{a.s.}
\end{aligned}
\tag{2.2.24}
$$

综合 (2.2.20) 和 (2.2.24) 得证 (2.2.14).

第二步 假设条件 (i), (ii) 和 (iv) 满足. 则

$$
\liminf_{T\to\infty}\gamma(T)\sup_{0\le t\le T-a_T}|Z(t+a_T)-Z(t)|\ge1 \quad \text{a.s.} \tag{2.2.25}
$$

证明 如果 $0<\alpha\le1/2$, 由引理 2.2.5 (其中 $\varepsilon=1/2$) 对充分大的 T 有

$$
\begin{aligned}
& P\left\{\sup_{0\le t\le T-a_T}|Z(t+a_T)-Z(t)|<\gamma^{-1}(T)\right\} \\
& \le\exp\left(-\frac{1}{2}H_{2\alpha}\frac{T}{a_T\sqrt{2\pi}}\left(2\log\frac{T}{a_T\log\log T}\right)^{1/\alpha-1}\frac{a_T\log\log T}{T}\right) \\
& \le(\log T)^{-4}.
\end{aligned}
\tag{2.2.26}
$$

令 $T_k=k^{\sqrt{k}}$ $(k=1,2,\cdots)$. 由 Borel-Cantelli 引理得

$$
\liminf_{k\to\infty}\gamma(T_k)\sup_{0\le t\le T_k-a_{T_k}}|Z(t+a_{T_k})-Z(t)|\ge1 \quad \text{a.s.} \tag{2.2.27}
$$

对 $T_k \le T \le T_{k+1}$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\gamma(T)\sup_{0\le t\le T-a_T}|Z(t+a_T)-Z(t)|\\
\ge&\Big(2a_{T_{k+1}}^{2\alpha}\log\frac{T_{k+1}}{a_{T_{k+1}}\log\log T_k}\Big)^{-1/2}\Big(\sup_{0\le t\le T_k-a_{T_k}}|Z(t+a_{T_k})-Z(t)|\\
&\quad-\sup_{0\le t\le T_k-a_{T_k}}\sup_{0\le s\le a_{T_{k+1}}-a_{T_k}}|Z(t+s)-Z(t)|\Big)\\
=:&A_k\gamma(T_k)I(T_k)-J_k(T_k),
\end{aligned}\tag{2.2.28}$$

其中

$$A_k=\Big(\frac{a_{T_k}}{a_{T_{k+1}}}\Big)^{\alpha}\Big(\frac{\log((T_k/a_{T_k})/\log\log T_k)}{\log((T_{k+1}/a_{T_{k+1}})/\log\log T_k)}\Big)^{1/2}.$$

注意到 $T_k/T_{k+1}\to 1\ (k\to\infty)$, 我们有 $a_{T_k}/a_{T_{k+1}}\to 1\ (k\to\infty)$. 从而

$$A_k\to 1\quad (k\to\infty).\tag{2.2.29}$$

另一方面，由定理 2.2.2 得

$$\limsup_{k\to\infty}\sup_{0\le t\le T_k-a_{T_k}}\sup_{0\le s\le a_{T_{k+1}}-a_{T_k}}\beta(T_k)|Z(t+s)-Z(t)|\le 1\quad \text{a.s.}\tag{2.2.30}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\beta(T_k)\\
=&\Big(2(a_{T_{k+1}}-a_{T_k})^{2\alpha}\Big(\log\frac{T_k+a_{T_{k+1}}}{a_{T_{k+1}}-a_{T_k}}+\log\log(T_k+a_{T_{k+1}})\Big)\Big)^{-1/2}.
\end{aligned}$$

易证

$$a_{T_{k+1}}-a_{T_k}\le a_{T_{k+1}}(1-T_k/T_{k+1})\le 6a_{T_{k+1}}/k^{1/3},$$

由此得

$$\beta^{-2}(T_k)\Big(2a_{T_{k+1}}^{2\alpha}\log\frac{T_{k+1}}{a_{T_{k+1}}\log\log T_k}\Big)^{-1}$$

$$\leq\Big(\frac{a_{T_{k+1}}-a_{T_k}}{a_{T_{k+1}}}\Big)^{2\alpha}\frac{\log\frac{2T_{k+1}}{a_{T_{k+1}}\log\log T_k}+\log\frac{a_{T_{k+1}}}{a_{T_{k+1}}-a_{T_k}}+2\log\log(2T_k)}{\log\frac{T_{k+1}}{a_{T_{k+1}}\log\log T_k}}$$

$$\leq ck^{2\alpha/3}\log k+c\frac{\big(\frac{a_{T_{k+1}}-a_{T_k}}{a_{T_{k+1}}}\big)^{2\alpha}\log\frac{a_{T_{k+1}}}{a_{T_{k+1}}-a_{T_k}}}{\log\frac{T_{k+1}}{a_{T_{k+1}}\log\log T_k}}\to 0\quad(k\to\infty).$$

从而我们有

$$\limsup_{k\to\infty}J_k(T_k)=0\quad\text{a.s.}\tag{2.2.31}$$

综合 (2.2.27)—(2.2.31) 得证 (2.2.25).

当 $1/2<\alpha<1$ 时，用引理 2.2.6 代替引理 2.2.5 且 (2.2.26) 中的 $\gamma^{-1}(T)$ 用 $(1-\varepsilon)\gamma^{-1}(T)$ 代替，证明类似.

第三步 假设条件 (i), (ii) 和 (iv′) 满足. 则对某个 $c_\alpha>0$ 我们有

$$\liminf_{T\to\infty}\gamma_1(T)\sup_{0\leq t\leq T-a_T}\sup_{0\leq s\leq a_T}|Z(t+s)-Z(t)|\geq c_\alpha\quad\text{a.s.}\tag{2.2.32}$$

证明 由条件 (iv′) 知 $\gamma'(T)(\frac{T}{\log\log T})^\alpha\to 1\ (T\to\infty)$. 由引理 2.2.7 对充分大的 T 有

$$P\Big\{(\frac{\log\log T}{T})^\alpha\sup_{0\leq t\leq T-a_T}\sup_{0\leq s\leq a_T}|Z(t+s)-Z(t)|\leq x^\alpha\Big\}$$

$$\leq\exp\Big(-\frac{T}{a_T}\frac{a_T\log\log T}{xT}c_\alpha\Big)=(\log T)^{-\frac{c_\alpha}{x}}.$$

令 $T_k=k^{\sqrt{k}}\ (k=1,2,\cdots)$, 由 Borel-Cantelli 引理得

$$\liminf_{k\to\infty}\Big(\frac{\log\log T_k}{T_k}\Big)^\alpha\sup_{0\leq t\leq T_k-a_{T_k}}\sup_{0\leq s\leq a_{T_k}}|Z(t+s)-Z(t)|\geq\Big(\frac{c_\alpha}{2}\Big)^\alpha.\tag{2.2.33}$$

此外

$$
\begin{aligned}
&\Big(\frac{\log\log T_k}{T_{k+1}}\Big)^{\alpha}\beta^{-2}(T_k)\\
&= 2\Big(\frac{a_{T_{k+1}}-a_{T_k}}{a_{T_{k+1}}}\Big)^{2\alpha}\Big(\frac{a_{T_{k+1}}\log\log T_k}{T_{k+1}}\Big)^{2\alpha}\Big(\log\frac{T_k+a_{T_{k+1}}}{a_{T_{k+1}}-a_{T_k}}\\
&\qquad +\log\log(T_k+a_{T_{k+1}})\Big)\\
&\le 2\Big(\frac{a_{T_{k+1}}-a_{T_k}}{a_{T_{k+1}}}\Big)^{2\alpha}\Big(\frac{a_{T_{k+1}}\log\log T_k}{T_{k+1}}\Big)^{2\alpha}\Big(\log\frac{2T_{k+1}}{a_{T_{k+1}}\log\log T_k}\\
&\qquad +\log\frac{a_{T_{k+1}}}{a_{T_{k+1}}-a_{T_k}}+2\log\log(2T_k)\Big)\\
&\le ck^{-2\alpha/3}(\log k)^{2\alpha+1}+ck^{-2\alpha/3}\log k^{1/3}\to 0\quad (k\to\infty),
\end{aligned}
$$

其中用到了条件 (iv$'$), 其余证明与 (2.2.25) 的类似.

第四步 假设条件 (iv$'$) 满足. 则对某个 $c_\alpha>0$ 有

$$
\liminf_{T\to\infty}\gamma_1(T)\sup_{0\le t\le T-a_T}\sup_{0\le s\le a_T}|Z(t+s)-Z(t)|\le c_\alpha\quad \text{a.s.}\quad (2.2.34)
$$

证明 由 Chung 型重对数律 (见定理 4.2.2) 和下述不等式则有

$$
\begin{aligned}
&\liminf_{T\to\infty}\gamma'(T)\sup_{0\le t\le T-a_T}\sup_{0\le s\le a_T}|Z(t+s)-Z(t)|\\
&\qquad\le 2\liminf_{T\to\infty}\Big(\frac{\log\log T}{T}\Big)^{\alpha}\sup_{0\le t\le T}|Z(t)|.
\end{aligned}
$$

注 2.2.3 定理 2.2.4 中的条件 (i) 和 (ii) 可以去掉, 但证明更加复杂 (参见 Zhang 1997b).

注 2.2.4 Zhang (1997a) 还讨论了 $Z(\cdot)$ 的 Hanson-Russo 型增量的下极限性质.

2.2.4 更一般的 Gauss 过程

设 $\{\Gamma(t);t\ge 0\}$ 为零均值 Gauss 过程, 且

$$
\sigma^2(h)=E(\Gamma(t+h)-\Gamma(t))^2,
$$

其中 $\sigma(s)$ 为非降函数. 在适当的条件下，这个 Gauss 过程有与分数 Wiener 过程类似的连续模和大增量性质.

定理 2.2.5 设 $\sigma(\cdot)$ 在 0 点以指数 $\alpha > 0$ 正则变化. 假设对某 $h_0 > 0$ 有

$$E(\Gamma(d) - \Gamma(c))(\Gamma(b) - \Gamma(a)) \leq 0 \quad \forall 0 \leq a < b \leq c < d < h_0, \tag{2.2.35}$$

则

$$\lim_{h \to 0} \sup_{0 \leq t \leq 1-h} \sup_{0 \leq s \leq h} \frac{|\Gamma(t+s) - \Gamma(t)|}{\{2\sigma^2(h) \log h^{-1}\}^{1/2}} = 1 \quad \text{a.s.} \tag{2.2.36a}$$

$$\lim_{h \to 0} \sup_{0 \leq t \leq 1-h} \frac{|\Gamma(t+h) - \Gamma(t)|}{\{2\sigma^2(h) \log h^{-1}\}^{1/2}} = 1 \quad \text{a.s.} \tag{2.2.36b}$$

注 2.2.5 由 (2.1.22) 定义的独立 O-U 过程的无穷级数 $X(\cdot)$ 满足 (2.2.35).

注 2.2.6 若对某个 $\alpha > 0$, $\sigma(s)/s^\alpha$ 为 (0, 1) 上的拟增函数且 (2.2.35) 满足，则 (2.2.36) 仍成立 (见定理 3.3.3).

定理 2.2.6 设 $\sigma(\cdot)$ 在无穷处以一个正指数 α 正则变化. 假设

$$E(\Gamma(d) - \Gamma(c))(\Gamma(b) - \Gamma(a)) \leq 0 \quad \forall 0 < a < b \leq c < d < \infty. \tag{2.2.37}$$

设 a_T $(0 < a_T \leq T)$ 为 T 的函数，满足定理 2.2.2 中的条件 (i) 和 (ii). 则

$$\begin{aligned}&\limsup_{T \to \infty} \sup_{0 \leq t \leq a_T} \sup_{0 \leq s \leq a_T} \beta_T |\Gamma(t+s) - \Gamma(t)| \\ &\quad = \limsup_{T \to \infty} \beta_T |\Gamma(T + a_T) - \Gamma(t)| = 1 \quad \text{a.s.}\end{aligned}$$

进一步，若定理 2.2.2 中的条件 (iii) 满足，则

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le a_T}\sup_{0\le s\le a_T}\beta_T|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)|$$
$$=\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le a_T}\beta_T|\Gamma(t+a_T)-\Gamma(t)|=1 \quad \text{a.s.}$$

定理 2.2.5 和 2.2.6 的证明分别与定理 2.2.1 和 2.2.2 中的 $\alpha \le 1/2$ 情形类似.

对于下极限，我们也有一个类似于定理 2.2.4 的结果.

定理 2.2.7 设 (2.2.37) 满足，且 $\sigma(\cdot)$ 在无穷处以一个正指数正则变化. 令 a_T $(0<a_T\le T)$ 为 T 的函数，满足定理 2.2.4 中的条件 (i), (ii) 和 (iv). 则

$$\begin{aligned}&\liminf_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\sup_{0\le s\le a_T}\gamma(T)\big(\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\big)\\&=\liminf_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\gamma(T)\big(\Gamma(t+a_T)-\Gamma(t)\big)\\&=1 \quad \text{a.s.}\end{aligned} \tag{2.2.38}$$

注 2.2.7 值得指出的是：(2.2.38) 是关于增量的单边值的结果，我们不知道单边值用绝对值代替后，(2.2.38) 是否仍然成立.

证明 我们首先证明

$$\liminf_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\sup_{0\le s\le a_T}\gamma(T)\big(\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\big)\le 1 \quad \text{a.s.} \tag{2.2.39}$$

若 (2.2.15) 满足，则 (2.2.39) 的证明与 (2.2.14) 的类似. 若 (2.2.17) 满足，我们令 $T_n=e^{n^p}$ $(p>1)$,

$$A_n=\Big\{\sup_{T_{n-1}<t\le T_n-a_{T_n}}\sup_{0\le s\le a_{T_n}}\big(\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\big)\le(1+\varepsilon)^{1/2}\gamma^{-1}(T_n)\Big\}.$$

则 $T_{n-1}/T_n\to 0$ $(n\to\infty)$, 与 (2.2.18) 类似，对充分大的 n 我们有

$$P(A_n)\ge n^{-2/3}.$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$. 另一方面，由 Slepian 引理，从 (2.2.37) 可得

$$P(A_j A_k) \le P(A_j)P(A_k), \quad j \ne k.$$

因此由 Borel-Cantelli 引理得 $P(A_n, \text{i.o.}) = 1$, 此即证明了

$$\liminf_{n\to\infty} \gamma(T_n) \sup_{T_{n-1}<t\le T_n-a_{T_n}} \sup_{0\le s\le a_{T_n}} (\Gamma(t+s)-\Gamma(t)) \le 1 \quad \text{a.s.} \tag{2.2.40}$$

显然

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\le t\le T_n-a_{T_n}} \sup_{0\le s\le a_{T_n}} (\Gamma(t+s)-\Gamma(t)) \\
&\quad \le \sup_{T_{n-1}\le t\le T_n-a_{T_n}} \sup_{0\le s\le a_{T_n}} (\Gamma(t+s)-\Gamma(t)) \\
&\qquad + \sup_{0\le u<v\le T_{n-1}} |\Gamma(u)-\Gamma(v)|.
\end{aligned} \tag{2.2.41}$$

由定理 2.2.6 我们有

$$\limsup_{n\to\infty} (2\sigma^2(T_{n-1})\log\log T_{n-1})^{-1} \sup_{0\le u<v\le T_{n-1}} |\Gamma(u)-\gamma(v)| \le 1 \text{ a.s.} \tag{2.2.42}$$

由于 $\sigma(x)$ 在无穷处以一个正指数 α 正变, 所以 $\sigma(x)/x^{\alpha/2}$ 在 $[1,\infty)$ 上拟增，由 (2.2.17) 得

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma(T_{n-1})}{\sigma(a_{T_{n-1}})} &\le \frac{\sigma(T_{n-1})}{\sigma(T_n/(\log\log T_n)^{\gamma_0})} \\
&\le c\Big(\frac{T_{n-1}}{T_n/(\log\log T_n)^{\gamma_0}}\Big)^{\alpha/2} \le c\exp(-cn^{p-1}),
\end{aligned}$$

由此和 (iv) 得

$$\gamma(T_n)(2\sigma^2(T_{n-1})\log\log T_{n-1}) \to 0, \quad n\to\infty. \tag{2.2.43}$$

综合 (2.2.40)—(2.2.43) 得证 (2.2.39).

剩下我们只要证明

$$\liminf_{T\to\infty} \sup_{0\le t\le T-a_T} \gamma(T)(\Gamma(t+a_T)-\Gamma(t)) \ge 1 \quad \text{a.s.}$$

注意到下述引理，上式的证明与定理 2.2.4 的第二步证明类似.

引理 2.2.9 设 $\{\Gamma(t);t\geq 0\}$ 为如定理 2.2.7 所示的 Gauss 过程. 则

$$P\Big\{\sup_{0\leq t\leq T}(\Gamma(t+a)-\Gamma(t))\leq u\sigma(a)\Big\}$$
$$\leq \exp\Big(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{T}{a}\frac{1}{u}\Big(1-\frac{1}{u^2}\Big)e^{-u^2/2}\Big)$$

对任何 $T>a>0$ 成立.

证明 由 Slepian 引理，我们有

$$P\Big\{\sup_{0\leq t\leq T}(\Gamma(t+a)-\Gamma(t))\leq u\sigma(a)\Big\}$$
$$\leq P\Big\{\sup_{0\leq k\leq [T/a]}(\Gamma(ka+a)-\Gamma(ka))\leq u\sigma(a)\Big\}$$
$$\leq \prod_{k=0}^{[T/a]}P\{N(0,1)\leq u\}\leq \exp\Big(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{T}{a}\frac{1}{u}\Big(1-\frac{1}{u^2}\Big)e^{-u^2/2}\Big),$$

这就是我们要证的.

§ 2.3 两参数 Wiener 过程的大增量

在本节和本章的余下的章节中，我们研究比单参数情形复杂得多的多参数随机过程的样本轨道性质. 最简单的多参数随机过程就是两参数 Wiener 过程 $\{W(x,y);(x,y)\in\mathcal{R}^2\}$.

一个随机过程 $\{W(x,y);(x,y)\in\mathcal{R}^2\}$ 称为是两参数 Wiener 过程，如果

(1) 对任何矩形 $R=[x_1,x_2)\times[y_1,y_2)$, $W(R)\in N(0,\lambda(R))$, 其中 $\lambda(R)=(x_2-x_1)(y_2-y_1)$, $W(R)=W(x_2,y_2)-W(x_1,y_2)-W(x_2,y_1)+W(x_1,y_1)$,

(2) $W(0,y)=W(x,0)=0$ $(x,y\in\mathcal{R}^2)$,

(3) $\{W(x,y)\}$ 是独立增量过程，即如果 $R_1,\cdots,R_n$ 为互不相交的矩形，则 $W(R_1)$, $\cdots$, $W(R_n)$ $(n=2,3,\cdots)$ 为相互独立的随机变量，

(4) 以概率 1, 样本函数 $W(x,y;\omega)$ 关于 (x,y) 连续.

$W(\cdot,\cdot)$ 的连续模由 Pruitt 和 Orey (1973) 得到 (参见第 2.5 节). 这里我们只考察当 $T\to\infty$ 时 $W(\cdot,\cdot)$ 在面积为 a_T 的矩形上的增量有多大的问题.

设 $0<a_T\le T$ 和 $b_T\ge T^{1/2}$ 为 T 的两个非降函数， $D_T = D_T(b_T)=\{(x,y):xy\le T, 0\le x,y\le b_T\}$, $L_T=L_T(a_T,b_T)$ (对应地 $L_T^*=L_T^*(a_T,b_T)$) 表示满足 $\lambda(R)\le a_T$ (对应地 $\lambda(R)=a_T$) 的矩形 $R=[x_1,x_2)\times[y_1,y_2)\subset D_T(b_T)$ 组成的集合. 定义

$$
\begin{aligned}
\delta_T =&\{2a_T(\log Ta_T^{-1}+\log(\log b_Ta_T^{-1/2}+1)+\log\log T)\}^{-1/2},\\
\gamma_T =&\{2a_T(\log Ta_T^{-1}+\log(\log b_Ta_T^{-1/2}+1)-\log\log\log T)\}^{-1/2},\\
\lambda_T =&\{2a_T(\log Ta_T^{-1}+\log(\log b_Ta_T^{-1/2}+1))\}^{-1/2}.
\end{aligned}
$$

我们称一个 T 的函数 $f(T)>0$ 是正则非增的，如果存在一个非增的函数 $g(T)>0$ 使得

(a) $\lim_{T\to\infty} f(T)/g(T)=1$,

(b) 对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\theta_0=\theta_0(\varepsilon)>1$ 使得对任何 $1<\theta\le\theta_0$ 和 $k\ge 1$ 有,

$$
\limsup_{T\to\infty}\frac{g(\theta^k)}{g(\theta^{k+1})}\le 1+\varepsilon.
$$

Csörgő 和 Révész (1978) 研究了两参数 Wiener 过程增量有多大的问题. 他们证明了

定理 2.3.1 设 Ta_T^{-1} 是 T 的非降函数，且 δ_T 是 T 的正则非增函数. 则

$$
\limsup_{T\to\infty}\sup_{R\in L_T^*}\delta_T|W(R)| = \limsup_{T\to\infty}\sup_{R\in L_T}\delta_T|W(R)|=1 \quad \text{a.s.} \tag{2.3.1}
$$

若我们还有

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\log Ta_T^{-1}+\log(1+\log b_Ta_T^{-1/2})}{\log\log T}=\infty, \tag{2.3.2}$$

则在 (2.3.1) 中 $\limsup_{T\to\infty}$ 可用 $\lim_{T\to\infty}$ 代替.

详细证明可在 Csörgő 和 Révész (1981) 中找到，我们不再叙述. 我们更为感兴趣的是当条件 (2.3.2) 不满足时 $W(\cdot,\cdot)$ 的下极限性质. 下述结果是由张立新 (1997c) 得到的.

定理 2.3.2 设

(i) Ta_T^{-1} 是 T 的非降函数,

(ii) γ_T 为 T 的正则非增函数,

(iii) $\liminf_{T\to\infty}\dfrac{\log Ta_T^{-1}+\log(\log b_Ta_T^{-1/2}+1)}{\log\log\log T}>1.$

则

$$\liminf_{T\to\infty}\sup_{R\in L_T}\gamma_T|W(R)|=\liminf_{T\to\infty}\sup_{R\in L_T^*}\gamma_TW(R)=1 \quad \text{a.s.} \tag{2.3.3}$$

在证明定理 2.3.2 之前，我们先给出一个直接的推论:

推论 2.3.1 设定理 2.3.2 中的条件 (i) 满足，且

(ii′) λ_T 为 T 的正则非增函数,

(iii′) $\lim_{T\to\infty}\dfrac{\log Ta_T^{-1}+\log(\log b_Ta_T^{-1/2}+1)}{\log\log\log T}=r \quad (1\le r\le\infty)$.

则

$$\liminf_{T\to\infty}\sup_{R\in L_T}\lambda_T|W(R)| =\liminf_{T\to\infty}\sup_{R\in L_T^*}\lambda_TW(R)=\left(\frac{r-1}{r}\right)^{1/2} \quad \text{a.s.}, \tag{2.3.4}$$

其中当 $r=\infty$ 时，$(r-1)/r=1$.

注 2.3.1　推论 2.3.1 首先由林正炎 (1984) 对 $r=\infty$ 的情形得到.

定理的证明依赖于下述不等式, 它是引理 2.2.4 的一个类比.

定理 2.3.3　对任何 $\varepsilon>0$, 存在常数 $C=C(\varepsilon)>0$, $u_0=u_0(\varepsilon)>0$ 和 $T_0=T_0(\varepsilon)>0$ 使得

$$
\begin{aligned}
&P\{\sup_{R\in L_T}|W(R)|\le ua_T^{1/2}\}\\
&\ge\exp\left(-CTa_T^{-1}(1+\log Ta_T^{-1})(1+\log b_Ta_T^{-1/2})e^{-u^2/(2+\varepsilon)}\right)
\end{aligned}
\tag{2.3.5}
$$

对任何 $u\ge u_0$, $T\ge T_0$ 成立.

为证明这个不等式, 我们首先引入一些记号并给出两个引理.

令 $\mu=\mu(T)$ 为使得下式成立的最小整数:

$$\mu\ge\log b_Ta_T^{-1/2}.$$

对任何正整数 q, 令 $Q=Q(q)=2^q$. 定义

$$
\begin{aligned}
z_i=z_i(q)=z_i(q,T)&=a_T^{1/2}e^{i/Q} &&(i=0,\pm1,\cdots,\pm Qu),\\
x_j(i)=x_j(i,T)&=jz_iQ^{-1} &&(j=0,1,\cdots),\\
y_j(i)=y_j(i,T)&=ja_Tz_i^{-1}Q^{-1} &&(j=0,1,\cdots),\\
R_i=R_i(q)=R_i(q,0,0)&=[0,z_i]\times[0,a_Tz_i^{-1}],\\
R_i(j,l)=R_i(q,j,l)&=R_i+(x_j(i),y_l(i))\\
&=\{(x,y):(x-x_j(i),y-y_l(i))\in R_i\}.
\end{aligned}
$$

令 $L_T^*(q)$ 表示包含在区域 $D_T(b_T)$ 中的矩形 $R_i(q,j,l)$ 组成的集合. 对任意的 $R=[x_1,x_2]\times[y_1,y_2]\in L_T$ 按如下的方式定义一个矩形 $R(q)\in L_T^*(q)$: 令 $i_0=i_0(R)$ 为使得 $z_{i_0}\ge x_2-x_1$ 成立的最小

整数，$j_0 = j_0(R), l_0 = l_0(R)$ 分别为使得 $x_{j_0}(i_0) \le x_1, y_{l_0}(i_0) \le y_1$ 成立的最大整数，并令

$$R(q) = R_{i_0}(q, j_0, l_0) = \big(x_{j_0}(i_0), y_{l_0}(i_0)\big) + [0, z_{i_0}] \times [0, a_T z_{i_0}^{-1}].$$

下述引理可在 Csörgő 和 Révész (1981) 中找到.

引理 2.3.1 我们有

$$\text{Card } L_T^*(q) \le 8Q^3 T a_T^{-1}(1 + \log T a_T^{-1})(1 + \log b_T a_T^{-1/2}), \tag{2.3.6}$$

$$\text{对每个 } R \in L_T^*, \quad \lambda\big(R \circ R(q)\big) \le 6a_T Q^{-1}, \tag{2.3.7}$$

$$\text{对每个 } R \in L_T^*(q), \quad \lambda(R) = a_T, \tag{2.3.8}$$

其中 λ 为 Lebesgue 测度，符号 $\circ$ 表示集合的对称差.

在定理 2.3.3 的证明中我们还要用到下述结果:

引理 2.3.2 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在常数 $C = C(\varepsilon) > 0$, $u_0 = u_0(\varepsilon) \ge 1$ 使得

$$P\left\{\sup_{\substack{x_0 \le x \le T_1 + x_0 \\ y_0 \le y \le T_2 + y_0}} \sup_{\substack{0 \le s \le h_1 \\ 0 \le t \le h_2}} |W([x, x+s] \times [y, y+t])| \le u(h_1 h_2)^{1/2}\right\}$$
$$\overset{\text{KS}}{\ge} \exp\left\{-C\left(\frac{T_1}{h_1} + 1\right)\left(\frac{T_2}{h_2} + 1\right)e^{-u^2/(2+\varepsilon)}\right\} \tag{2.3.9}$$

对任何 $x_0, y_0 \ge 0$, $0 < h_1 \le T_1$, $0 < h_2 \le T_2$ 和 $u \ge u_0$ 成立.

特别地，对 $u \ge u_0$, $T_1, T_2 > 0$ 和 $x_0, y_0 \ge 0$ 我们有

$$P\left\{\sup_{R \subset [x_0, x_0 + T_1] \times [y_0, y_0 + T_2]} |W(R)| \le u(T_1 T_2)^{1/2}\right\}$$
$$\overset{\text{KS}}{\ge} \exp\{-ce^{-u^2/(2+\varepsilon)}\}, \tag{2.3.10}$$

其中 $R = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$.

证明 不失一般性，不妨设 $x_0 = y_0 = 0$. 对正实数 s 和正整数 r, 令 $s_r = h_1[s\frac{2^r}{h_1}]/2^r$. 记 $R = 2^r$. 显然，对固定的 $\omega \in \Omega$ 和 x, y, s, r, t 我们有

$$
\begin{aligned}
&|W([x,x+s]\times[y,y+t])| \\
&\quad \le |W([x_r,(x+s)_r]\times[y,y+t])| \\
&\qquad + \sum_{j=0}^{\infty}|W([(x+s)_{r+j},(x+s)_{r+j+1}]\times[y,y+t])| \\
&\qquad + \sum_{j=0}^{\infty}|W([x_{r+j},x_{r+j+1}]\times[y,y+t])|. \qquad (2.3.11)
\end{aligned}
$$

由引理 2.2.4, 对任何固定的 x, s 有

$$
\begin{aligned}
&P\left\{\sup_{0\le y\le T_2}\sup_{0\le t\le h_2} W([x,x+s]\times[y,y+t])| \le us^{1/2}h_2^{1/2}\right\} \\
&\overset{\text{KS}}{\ge} \exp\left\{-C\left(\frac{T_2}{h_2}+1\right)u^7e^{-\frac{u^2}{2}}\right\} \quad (u \ge u_1 \ge 1). \qquad (2.3.12)
\end{aligned}
$$

从而，由 (2.3.11) 和引理 2.2.2 对任意的 $u \ge u_0$, $x_j \ge u_1$, $0 < h_1 \le T_1$ 和整数 r, j 我们有

$$
\begin{aligned}
&P\Big\{\sup_{\substack{0\le x\le T_1\\0\le y\le T_2}}\sup_{\substack{0\le s\le h_1\\0\le t\le h_2}}|W([x_r,(x+s)_r]\times[y,y+t])| \le uh_2^{1/2}\sqrt{h_1(1+1/R)}\Big\} \\
&\overset{\text{KS}}{\ge} \exp\left\{-CR^2\left(\frac{T_1}{h_1}+1\right)\left(\frac{T_2}{h_2}+1\right)u^7e^{-\frac{u^2}{2}}\right\}, \qquad (2.3.13)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&P\Big\{\sup_{\substack{0\le x\le T_1\\0\le y\le T_2}}\sup_{\substack{0\le s\le h_1\\0\le t\le h_2}}|W([(x+s)_{r+j},(x+s)_{r+j+1}][y,y+t])| \\
&\qquad \le x_jh_2^{1/2}\frac{h_1^{1/2}}{\sqrt{2^{r+j+1}}}\Big\} \\
&\quad \overset{\text{KS}}{\ge} \exp\left\{-C2^{r+j+1}\left(\frac{T_1}{h_1}+1\right)\left(\frac{T_2}{h_2}+1\right)x_j^7e^{-\frac{x_j^2}{2}}\right\}, \quad (2.3.14)
\end{aligned}
$$

和

$$P\left\{\sup_{\substack{0\le x\le T_1\\0\le y\le T_2}}\sup_{\substack{0\le s\le h_1\\0\le t\le h_2}}|W([x_{r+j},x_{r+j+1}]\times[y,y+t])|\le x_j h_2^{1/2}\frac{h_1^{1/2}}{\sqrt{2^{r+j+1}}}\right\}$$

$$\overset{\text{KS}}{\ge}\exp\left\{-C2^{r+j+1}\left(\frac{T_1}{h_1}+1\right)\left(\frac{T_2}{h_2}+1\right)x_j^7e^{-\frac{x_j^2}{2}}\right\}. \qquad (2.3.15)$$

由 (2.3.13), (2.3.14) 和 (2.3.15), 再次运用引理 2.2.2 得

$$P\left\{\sup_{\substack{0\le x\le T_1\\0\le y\le T_2}}\sup_{\substack{0\le s\le h_1\\0\le t\le h_2}}|W([x,x+s]\times[y,y+t])|\right.$$

$$\left.\le(h_1h_2)^{1/2}(u\sqrt{1+1/R}+2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x_j}{\sqrt{2^{r+j+1}}})\right\}$$

$$\overset{\text{KS}}{\ge}\exp\left\{-CR^2\left(\frac{T_1}{h_1}+1\right)\left(\frac{T_2}{h_2}+1\right)u^7e^{-\frac{u^2}{2}}\right.$$

$$\left.-8CR\left(\frac{T_1}{h_1}+1\right)\left(\frac{T_2}{h_2}+1\right)\sum_{j=0}^{\infty}2^jx_j^7e^{-\frac{x_j^2}{2}}\right\}. \qquad (2.3.16)$$

令 $x_j=\sqrt{2j+u^2}$. 取 R 充分大得

$$u\sqrt{1+\frac{1}{R}}+2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x_j^2}{\sqrt{2^{r+j+1}}}$$

$$\le u\left(1+\left(\frac{1}{R}\right)^{1/2}\right)+2\left(\frac{1}{R}\right)^{1/2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\sqrt{4ju^2}}{\sqrt{2^{j+1}}}$$

$$\le u\left(1+\left(\frac{1}{R}\right)^{1/2}+2\left(\frac{1}{R}\right)^{1/2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2j}}{\sqrt{2^j}}\right)$$

$$\le u\left(1+A\left(\frac{1}{R}\right)^{1/2}\right)\le u\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/2},$$

其中 $A=1+2\sum_{j=0}^{\infty}\sqrt{2j/2^j}$,

$$\sum_{j=0}^{\infty}2^jx_j^7e^{-\frac{x_j^2}{2}}\le e^{-\frac{u^2}{2}}\sum_{j=0}^{\infty}(4ju^2)^{7/2}(2/e)^j=u^7e^{-\frac{u^2}{2}}B,$$

这里 $B=\sum_{j=0}^{\infty}(4j)^{7/2}(2/e)^j$. 从而取 $x=u(1+\varepsilon/2)^{1/2}$ 和 $u_0=2u_1$ 即得 (2.3.9).

定理 2.3.3 的证明

对任意的 $R\in L_T$, 对称差 $R(q)\circ R(q+1)$ 至多是四个矩形的和, 记 $R(q)\circ R(q+1)=R^{(1)}(q)+R^{(2)}(q)+R^{(3)}(q)+R^{(4)}(q)$. 这类矩形 $R^{(i)}(q)$ $(i=1,2,3,4)$ 的全体记为 $\tilde{L}_T^*(q)$. 因为对任何 L_T^* 中的 R, 当 $q\to\infty$ 时 $R(q)\to R$, 我们有

$$\sup_{R\in L_T}|W(R)|\le\sup_{R\in L_T^*(q)}\sup_{S\subset R}|W(S)|+4\sum_{i=0}^{\infty}\sup_{R\in\tilde{L}_T^*}\sup_{S\subset R}|W(S)|,\tag{2.3.17}$$

其中 S 为边平行于坐标轴的矩形.

由引理 2.2.4, 2.3.1 和 2.3.2, 对任何 $\delta>0$, 存在常数 $C_\delta>0$, $x_\delta\ge 1$ 使得对任何 $x\ge x_\delta$, $y_i\ge x_\delta$ 成立

$$P\left\{\sup_{R\in L_T^*(q)}\sup_{S\subset R}|W(S)|\le xa_T^{1/2}\right\}\overset{\text{KS}}{\ge}\exp\left\{-C_\delta\text{Card}L_T^*(q)e^{-x^2/(2+\delta)}\right\},\tag{2.3.18}$$

$$P\left\{\sup_{R\in\tilde{L}_T^*(q+i)}\sup_{S\subset R}|W(S)|\le y_i(6a_TQ^{-1}2^{-i})^{1/2}\right\}\overset{\text{KS}}{\ge}\exp\left\{-C_\delta\text{Card}\tilde{L}_T^*(q+i)e^{-y_i^2/(2+\delta)}\right\}.\tag{2.3.19}$$

注意到 $\text{Card}\tilde{L}_T^*(q+i)\le 4\text{Card}L_T^*(q+i)$, 由 (2.3.17), (2.3.18), (2.3.19) 并再次应用引理 2.2.2 得

$$\begin{aligned}&P\left\{\sup_{R\in L_T}|W(R)|\le xa_T^{1/2}+4\sum_{j=0}^{\infty}y_i(6a_TQ^{-1}2^{-i})^{1/2}\right\}\\&\overset{\text{KS}}{\ge}\exp\left\{-C_\delta\Big(\text{Card}L_T^*(q)e^{-x^2/(2+\delta)}\right.\\&\qquad\left.+4\sum_{i=0}^{\infty}\text{Card}L_T^*(q+i)e^{-y_i^2/(2+\delta)}\Big)\right\}.\end{aligned}\tag{2.3.20}$$

取 $y_i=(3i(2+\delta)+x^2)^{1/2}$ $(i=0,1,\cdots)$, 对充分大的 Q 和任意的 $x\geq 1$ 我们有

$$
\begin{aligned}
& x a_T^{1/2}+4\sum_{j=0}^{\infty} y_i(6a_T Q^{-1}2^{-i})^{1/2} \\
& \leq x a_T^{1/2}\Big\{1+4(6Q^{-1})^{1/2}\sum_{i=0}^{\infty}2^{-i/2}\Big\} \\
& \quad + 32a_T^{1/2}Q^{-1/2}\sum_{i=0}^{\infty}(i2^{-i})^{1/2} \\
& \leq x a_T^{1/2}(1+Q^{-1/2}A)+a_T^{1/2}Q^{-1/2}B \\
& \leq (1+\delta)x a_T^{1/2}, \qquad (2.3.21)
\end{aligned}
$$

其中 $A=4\sqrt{6}\sum_{i=0}^{\infty}2^{-i/2}$, $B=32\sum_{i=0}^{\infty}(i2^{-i})^{1/2}$; 进一步, 由引理 2.3.1 得

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Card}L_T^*(q)e^{-x^2/(2+\delta)}+4\sum_{i=0}^{\infty}\mathrm{Card}L_T^*(q+i)e^{-y_i^2/(2+\delta)} \\
& \leq CTa_T^{-1}(1+\log Ta_T^{-1})(1+\log b_T a_T^{-1/2})e^{-x^2/(2+\delta)}. \qquad (2.3.22)
\end{aligned}
$$

给定 $u\geq(1+\delta)x_\delta$, 令 $(1+\delta)x=u$, 由 (2.3.10), (2.3.21) 和 (2.3.22) 得

$$
\begin{aligned}
& P\Big\{\sup_{R\in L_T}|W(R)|\leq u a_T^{1/2}\Big\} \\
& \overset{\mathrm{KS}}{\geq} \exp\Big(-C_\delta Ta_T^{-1}(1+\log Ta_T^{-1})(1+\log b_T a_T^{-1/2})e^{-\frac{u^2}{(2+\delta)(1+\delta)}}\Big).
\end{aligned}
$$

从而定理 2.3.3 得证.

定理 2.3.2 的证明

我们分两步进行.

第一步　若

(iv) $\Delta_T=\frac{Ta_T^{-1}(1+\log Ta_T^{-1})(1+\log b_T a_T^{-1/2})}{\log\log T}\to\infty(T\to\infty)$,

则

$$
\liminf_{T\to\infty}\sup_{R\in L_T}\tilde{\delta}_T|W(R)|\leq 1 \quad \text{a.s.} \qquad (2.3.23)
$$

其中 $\tilde{\delta}_T = \{2a_T \log \Delta_T\}^{-1/2}$.

证明 若

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{\log Ta_T^{-1} + \log(\log Ta_T^{-1} + 1) + \log(\log b_T a_T^{-1/2} + 1)}{\log\log\log T} = \infty, \tag{2.3.24}$$

则存在序列 $\{T_N\}$ 满足 $T_N \uparrow \infty$ 使得

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\log T_N a_{T_N}^{-1} + \log(\log T_N a_{T_N}^{-1} + 1) + \log(\log b_{T_N} a_{T_N}^{-1/2} + 1)}{\log\log\log T_N} = \infty. \tag{2.3.25}$$

由定理 2.3.3, 有

$$\begin{aligned} P\Big\{ \sup_{R\in L_{T_N}} \tilde{\delta}_{T_N} |W(R)| \geq 1+\varepsilon \Big\} &\leq cT_N a_{T_N}^{-1}(1+\log T_N a_{T_N}^{-1})(\log b_{T_N} a_{T_N}^{-1/2} + 1) \\ &\quad \cdot \exp\Big(-\frac{2(1+\varepsilon)^2}{2+\varepsilon} \log \Delta_{T_N} \Big) \\ &\leq c\{T_N a_{T_N}^{-1}(1+\log T_N a_{T_N}^{-1})(\log b_{T_N} a_{T_N}^{-1/2} + 1)\}^{-\varepsilon'} \\ &\quad \cdot (\log\log T_N)^{1+\varepsilon'} \\ &\to 0 \quad (N\to\infty), \end{aligned}$$

其中 $\varepsilon' = \frac{2(1+\varepsilon)^2}{2+\varepsilon} - 1 > 0$. 从而

$$\liminf_{T\to\infty} \sup_{R\in L_T} \tilde{\delta}_T |W(R)| \leq \liminf_{N\to\infty} \sup_{R\in L_{T_N}} \tilde{\delta}_{T_N} |W(R)| \leq 1+\varepsilon \quad \text{a.s.}$$

现设

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{\log Ta_T^{-1} + \log(\log Ta_T^{-1} + 1) + \log(\log b_T a_T^{-1/2} + 1)}{\log\log\log T} < \infty.$$

不妨设对某个 $0 < r_0 < \infty$ 有

$$\begin{aligned} &Ta_T^{-1}(1+\log Ta_T^{-1})(1+\log b_T a_T^{-1/2}) \\ &\quad \leq (\log\log T)^{r_0} \quad (T > 0). \end{aligned} \tag{2.3.26}$$

令 $T_n = e^{n^p}$ $(p > 1)$, $D'_{T_{n+1}} = D_{T_{n+1}} \cap D^c_{T_n}$, $D''_{T_{n+1}} = \{(x,y):$

$0 \le x, y \le b_{T_{n+1}}, xy \le 2T_n\}$. 令 l_n 为介于双曲线 $xy = T_n$ 和 $xy = 2T_n$ 之间的一条折线，其边平行于坐标轴，顶点在 $xy = T_n$ 和 $xy = 2T_n$ 上，其中一个顶点为 $(\sqrt{2T_n}, \sqrt{2T_n})$. 这条折线 l_n 把整个平面分成上、下两部分. 记上部为 U_n，下部为 V_n. 对任意的 $R = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \subset D_{T_{n+1}}$，我们有 $R \cap U_n \subset D'_{T_{n+1}}$，$R \cap V_n \subset D''_{T_{n+1}}$，并且存在内部互不相交的矩形 $R_1, \cdots, R_k \subset D'_{T_{n+1}}$，$\tilde{R}_1, \cdots, \tilde{R}_{\tilde{k}} \subset D''_{T_{n+1}}$ 使得 $R \cap U_n = \cup_{i=1}^k R_i$，$R \cap V_n = \cup_{i=1}^{\tilde{k}} \tilde{R}_i$. 我们定义 $W(R \cap U_n) = \sum_{i=1}^k W(R_i)$ 和 $W(R \cap V_n) = \sum_{i=1}^{\tilde{k}} W(\tilde{R}_i)$. 令

$$L'_{T_{n+1}} = \{R \cap U_n : R = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \subset D_{T_{n+1}}, \lambda(R) \le a_{T_{n+1}}\}.$$

显然， $\{W(S); S \in L'_{T_{n+1}}\}_{n=1}^{\infty}$ 相互独立.

现对任意的 $R = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \subset D_{T_{n+1}}$，令 $M_n(R)$ 为 $R \cap V_n$ 的顶点数. 若 $R \subset D'_{T_{n+1}}$ 或 $R \subset D''_{T_{n+1}}$，则 $M_n(R) \le 6$. 若 $(x_1, y_1) \in D_{T_n}$，设 $(u_1, v_1), \cdots, (u_k, v_k)$ 为 l_n 的在双曲线 $xy = T_n$ 上且包含在 R 中的所有顶点，并且 $u_1 < \cdots < u_k$. 则 $v_1 = T_n/u_1$，$u_k = u_1 2^{k-1}$，$v_k = T_n/u_1 2^{-(k-1)}$. 因为 $(u_k - u_1)(v_1 - v_k) \le \lambda(R)$，即 $2^{k-1}(1 - 2^{-k+1})^2 T_n \le \lambda(R)$，所以我们有 $k \le \frac{1}{\log 2} \log \frac{\lambda(R)}{T_n} + 2$ (若 $k \ge 3$). 从而 $M_n(R) \le 2(k+4) \le 4\log(1 + \lambda(R)/T_n) + 12$. 因此在任何情形我们都有 $M_n(R) \le 4\log(1 + \lambda(R)/T_n) + 12$. 注意到 $W(R) = W(R \cap U_n) + W(R \cap V_n)$，我们有

$$\begin{aligned} \sup_{R \in L_{T_{n+1}}} |W(R)| &\le \sup_{S \in L'_{T_{n+1}}} |W(S)| + \left\{4\log\left(\frac{a_{T_{n+1}}}{T_n} + 1\right) + 12\right\} \\ &\quad \cdot \sup_{(x,y) \in D''_{T_{n+1}}} |W(x,y)|, \\ \sup_{S \in L'_{T_{n+1}}} |W(S)| &\le \sup_{R \in L_{T_{n+1}}} |W(R)| + \left\{4\log\left(\frac{a_{T_{n+1}}}{T_n} + 1\right) + 12\right\} \\ &\quad \cdot \sup_{(x,y) \in D''_{T_{n+1}}} |W(x,y)|. \end{aligned} \tag{2.3.27}$$

由定理 2.3.3, 对充分大的 n 有

$$
\begin{aligned}
J''_{n+1} := P\Big\{&\Big\{4\log\Big(\frac{a_{T_{n+1}}}{T_n}+1\Big)+12\Big\}\\
&\cdot \sup_{(x,y)\in D''_{T_{n+1}}} \tilde{\delta}_{T_{n+1}}|W(x,y)|>\varepsilon\Big\}\\
\le& P\left\{\sup_{(x,y)\in D''_{T_{n+1}}} |W(x,y)|>2(2T_n)^{1/2}a^{1/2}_{T_{n+1}}/(n^pT_n^{1/2})\right\}\\
\le& c\big(1+\log(b_{T_{n+1}}(2T_n)^{-1/2})\big)\exp\{-a_{T_{n+1}}/(n^{2p}T_n)\}\\
\le& c\big(1+\log b_{T_{n+1}}a^{-1/2}_{T_{n+1}}+\log a^{1/2}_{T_{n+1}}(2T_n)^{-1/2}\big)\\
&\cdot\exp\Big\{-\frac{T_{n+1}}{T_nn^{2p}}\Big/(\log\log T_{n+1})^{r_0}\Big\}\\
\le& c\big((\log\log T_{n+1})^{r_0}+\log T_{n+1}\big)\exp\{-e^{(n+1)^p-n^p}/(n^{2p}(n+1)^{r_0})\}\\
\le& cn^pe^{-n}.
\end{aligned}
\tag{2.3.28}
$$

从而由 Borel-Cantelli 引理得

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\Big\{4\log\Big(\frac{a_{T_{n+1}}}{T_n}+1\Big)+12\Big\}\sup_{(x,y)\in D''_{T_{n+1}}}\tilde{\delta}_{T_{n+1}}|W(x,y)|\\
&\quad\le\varepsilon \quad \text{a.s.}
\end{aligned}
\tag{2.3.29}
$$

由定理 2.3.3 并注意到 (iv), 对充分大的 n 有

$$
\begin{aligned}
J_{n+1} :=& P\left\{\sup_{R\in L_{T_{n+1}}}\tilde{\delta}_{T_{n+1}}|W(R)|\le 1+\varepsilon\right\}\\
&\ge\exp\Big\{-c\Delta_{T_{n+1}}\log\log T_{n+1}\cdot\exp\Big\{-\frac{2(1+\varepsilon)^2}{2+\varepsilon}\log\Delta_{T_{n+1}}\Big\}\Big\}\\
&=\exp\{-c\Delta^{-\varepsilon'}_{T_{n+1}}\log\log T_{n+1}\}\ge(n+1)^{1/2},
\end{aligned}
\tag{2.3.30}
$$

其中 $\varepsilon'=\frac{2(1+\varepsilon)^2}{2+\varepsilon}-1>0$. 由 (2.3.28), (2.3.30) 和 (2.3.27), 对充分大的 n 有

$$
\begin{aligned}
J'_{n+1} :=& P\Big\{\sup_{S\in L'_{T_{n+1}}}\tilde{\delta}_{T_{n+1}}|W(S)|\le 1+2\varepsilon\Big\}\\
\ge& J_{n+1}-J''_{n+1}\ge(n+1)^{1/2}-cn^pe^{-n}.
\end{aligned}
\tag{2.3.31}
$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} J'_{n+1} = \infty$. 由 Borel-Cantelli 引理和 $\{W(S); S \in L'_{T_{n+1}}\}_{n=1}^{\infty}$ 的独立性得

$$\liminf_{n\to\infty} \sup_{S\in L'_{T_{n+1}}} \tilde{\delta}_{T_{n+1}}|W(S)| \le 1+2\varepsilon \quad \text{a.s.} \tag{2.3.32}$$

由 (2.3.27), (2.3.29) 和 (2.3.32), 得

$$\liminf_{T\to\infty} \sup_{R\in L_T} \tilde{\delta}_T|W(R)| \le \liminf_{n\to\infty} \sup_{R\in L_{T_{n+1}}} \tilde{\delta}_{T_{n+1}}|W(R)| \le 1+3\varepsilon \quad \text{a.s.}$$

(2.3.23) 得证.

第二步 设条件 (i) 满足, 且

(ii″) $\tilde{\gamma}_T := \{2a_T(\log Ta_T^{-1} + \log(1+\log b_T^2 T^{-1}) - \log\log\log T)\}^{-1/2}$ 是 T 的正则非增的函数.

令 $\rho = \lim_{T\to\infty} a_T/T$. 若

(iv)′ $\tilde{\Delta}_T = \frac{Ta_T^{-1}(\log b_T^2 T^{-1}+1)}{\log\log T} \to \infty \quad (T\to\infty)$,

则

$$\liminf_{T\to\infty} \sup_{R\in L_T} \tilde{\gamma}_T W(R) \ge 1 \quad \text{a.s.} \tag{2.3.33}$$

进一步, 若 $\rho < 1$ 或 (iii) 成立, 则

$$\liminf_{T\to\infty} \sup_{R\in L_T^*} \tilde{\delta}_T W(R) \ge 1 \quad \text{a.s.} \tag{2.3.34}$$

证明 令 $L = L(T)$ 为使得下式成立的最大整数

$$\frac{T^{L+1}}{(T-a_T)^L b_T} < b_T \quad 若 \quad \rho < 1,$$

$$a_T^{1/2} M^{L+1} = T^{1/2} M^{L+1} < b_T \quad 若 \quad \rho = 1 \quad (M > 1).$$

定义矩形

$$S_i = S_i(T) = [x_1(i), x_2(i)] \times [y_1(i), y_2(i)]$$

$$=\begin{cases}\left[\left(\dfrac{T-a_T}{T}\right)^{i+1}b_T,\left(\dfrac{T-a_T}{T}\right)^{i}b_T\right]\times\left[0,\dfrac{T^{i+1}}{(T-a_T)^i b_T}\right], & 若\rho<1,\\ [T^{1/2}M^i,T^{1/2}M^{i+1}]\times[0,T^{1/2}M^{-i-1}], & 若\rho=1,\end{cases}$$

$i=0,1,\cdots,L$. 则 $S_i\subset D_T$ 且 $\lambda(S_i)=a_T$ $(\rho<1)$, $\lambda(S_i)=a_T(1-\frac{1}{M})=T(1-\frac{1}{M})$ $(\rho=1)$, $i=0,1,\cdots,L$.

若 $\rho<1$, 则 $L=L(T)\geq(\log b_T^2T^{-1})/\log\frac{T}{T-a_T}\geq KTa_T^{-1}\log b_T^2T^{-1}$. 从而

$$\begin{aligned}P\Big\{\sup_{R\in L_T^*}\tilde{\gamma}_TW(R)\leq 1-\varepsilon\Big\}&\leq P\Big\{\tilde{\gamma}_T\sup_{0\leq i\leq L}W(S_i(T))\leq 1-\varepsilon\Big\}\\&\leq\{1-\exp(-(1-\varepsilon)\log\tilde{\Delta}_T\}^{L+1}\leq\exp\{-c\tilde{\Delta}_T^{\varepsilon}\log\log T\}.\end{aligned}\tag{2.3.35}$$

若 $\rho=1$, 则 $L\geq(\log b_TT^{-1/2})/\log M$. 令 $L_T^{**}(M)=\{R\subset D_T:\lambda(R)=(1-\frac{1}{M})T\}$, $L_T'(M)=\{R\subset D_T:\lambda(R)\leq\frac{1}{M}T\}$. 对充分大的 M 有

$$\begin{aligned}P\Big\{\sup_{R\in L_T^{**}(M)}\tilde{\gamma}_TW(R)\leq 1-\varepsilon\Big\}&\leq P\Big\{\tilde{\gamma}_T\sup_{0\leq i\leq L}W(S_i(T)\leq 1-\varepsilon\Big\}\\&\leq\Big\{1-\Phi\Big(-(1-\varepsilon)\Big(\frac{M}{M-1}\Big)^{1/2}(\log\tilde{\Delta}_T)^{1/2}\Big)\Big\}^{L+1}\\&\leq\{1-\exp(-(1-\varepsilon)\log\tilde{\Delta}_T\}^{L+1}\\&\leq\exp\Big\{-c\frac{1}{\log M}\tilde{\Delta}_T^{\varepsilon}\log\log T\Big\}.\end{aligned}\tag{2.3.36}$$

令 $T_0=0$, $T_k=(1+k^{-1/2})^k$ $(k=1,2,\cdots)$, 则 $T_k\uparrow\infty$, 并且对充分大的 k 我们有 $\log T_k=k\log(1+k^{-1/2})>k^{1/3}$. 注意到 $\tilde{\Delta}_T\to\infty$, 由 (2.3.35), (2.3.36) 和 Borel-Cantelli 引理得

$$\liminf_{k\to\infty}\sup_{R\in L_{T_k}^*}\tilde{\gamma}_{T_k}W(R)\geq 1-\varepsilon\quad\text{a.s.}\quad(\rho<1),\tag{2.3.37}$$

$$\liminf_{k\to\infty}\sup_{R\in L_{T_k}^{**}(M)}\tilde{\gamma}_{T_k}W(R)\geq 1-\varepsilon\quad\text{a.s.}\quad(\rho=1).\tag{2.3.38}$$

令

$$L_{T_k}(k)=\{R: R\subset D_{T_{n+1}}, \lambda(R)\le a_{T_{k+1}}-a_{T_k}\}.$$

对任意的 $T>0$, 存在 k 使得 $T_k<T\le T_{k+1}$, 则

$$\sup_{R\in L_T^*}\tilde{\gamma}_T W(R)\ge \sup_{R\in L_{T_k}^*}\tilde{\gamma}_T W(R)-4\sup_{R\in L_{T_k}(k)}\tilde{\gamma}_T|W(R)|.$$

注意到 $\tilde{\gamma}_T$ 是正则非增的且 $T_k/T_{k+1}\to 1$, 我们有

$$\begin{aligned}&\liminf_{T\to\infty}\sup_{R\in L_T^*}\tilde{\gamma}_T W(R)\\ &\quad\ge \liminf_{k\to\infty}\sup_{R\in L_{T_k}^*}\tilde{\gamma}_{T_k}W(R)\\ &\qquad-4\limsup_{k\to\infty}\sup_{R\in L_{T_k}(k)}\tilde{\gamma}_{T_{k+1}}|W(R)|.\end{aligned}\tag{2.3.39}$$

注意到若 k 充分大，则有 $a_{T_{k+1}}/(a_{T_{k+1}}-a_{T_k})>\sqrt{k}$, 我们得

$$\begin{aligned}&(a_{T_{k+1}}-a_{T_k})\Big\{\log\frac{T_{k+1}}{a_{T_{k+1}}-a_{T_k}}+\log\Big(1+\log\frac{T_{k+1}}{a_{T_{k+1}}-a_{T_k}}\Big)\\ &\cdot\log\Big(1+\frac{b_{T_{k+1}}}{\sqrt{a_{T_{k+1}}-a_{T_k}}}\Big)\Big\}\Big/a_{T_{k+1}}\log\tilde{\Delta}_{T_{k+1}}\le c\frac{a_{T_{k+1}}-a_{T_k}}{a_{T_{k+1}}}\\ &\times\frac{\log\tilde{\Delta}_{T_{k+1}}+\log\frac{a_{T_{k+1}}}{a_{T_{k+1}}-a_{T_k}}+\log\log T_{k+1}}{\log\tilde{\Delta}_{T_{k+1}}}\to 0\quad (k\to\infty).\end{aligned}$$

由定理 2.3.3, 对充分大的 k 有

$$\begin{aligned}&P\Big\{\sup_{R\in L_{T_k}(k)}\tilde{\gamma}_{T_{k+1}}|W(R)|>\varepsilon\Big\}\\ &\quad\le c\frac{T_{k+1}}{a_{T_{k+1}}-a_{T_k}}\Big(1+\log\frac{T_{k+1}}{a_{T_{k+1}}-a_{T_k}}\Big)\Big(1+\log\frac{b_{T_{k+1}}}{\sqrt{a_{T_{k+1}}-a_{T_k}}}\Big)\\ &\qquad\cdot\exp\Big\{-\frac{2\varepsilon^2}{2+\varepsilon}\frac{a_{T_{k+1}}}{a_{T_{k+1}}-a_{T_k}}\log\tilde{\Delta}_{T_{k+1}}\Big\}\\ &\quad\le\exp\Big\{-\frac{3\varepsilon^2}{2+\varepsilon}\frac{a_{T_{k+1}}}{a_{T_{k+1}}-a_{T_k}}\log\tilde{\Delta}_{T_{k+1}}\Big\}\le\exp(-\sqrt{k}).\end{aligned}\tag{2.3.40}$$

从而由 Borel-Cantelli 引理得

$$\limsup_{k\to\infty}\sup_{R\in L_{T_k}(k)}\tilde{\gamma}_{T_{k+1}}|W(R)|=0\quad \text{a.s.}\tag{2.3.41}$$

综合 (2.3.37), (2.3.39) 和 (2.3.41) 得

$$\liminf_{T\to\infty}\sup_{R\in L_T^*}\tilde{\gamma}_T W(R)\geq\liminf_{k\to\infty}\sup_{R\in L_{T_k}^*}\tilde{\gamma}_{T_k}W(R)\geq 1-\varepsilon\quad \text{a.s.}\ (\rho<1).\tag{2.3.42}$$

类似地,

$$\begin{aligned}&\liminf_{T\to\infty}\sup_{R\in L_T^{**}(M)}\tilde{\gamma}_T W(R)\\ &\quad\geq\liminf_{k\to\infty}\sup_{R\in L_{T_k}^{**}(M)}\tilde{\gamma}_{T_k}W(R)\geq 1-\varepsilon\quad \text{a.s.}\quad(\rho=1).\end{aligned}\tag{2.3.43}$$

若 $\rho<1$, 由 (2.3.42) 得

$$\liminf_{T\to\infty}\sup_{R\in L_T}\tilde{\gamma}_T W(R)\geq\liminf_{T\to\infty}\sup_{R\in L_T^*}\tilde{\gamma}_T W(R)\geq 1\quad \text{a.s.}\tag{2.3.44}$$

若 $\rho=1$, 由 (2.3.43) 得

$$\liminf_{T\to\infty}\sup_{R\in L_T}\tilde{\gamma}_T W(R)\geq\liminf_{T\to\infty}\sup_{R\in L_T^{**}}\tilde{\gamma}_T W(R)\geq 1-\varepsilon\quad \text{a.s.}\tag{2.3.45}$$

从而 (2.3.34) ($\rho<1$) 和 (2.3.33) 得证.

最后, 假设 $\rho=1$ 且 (iii) 成立. 易知

$$\sup_{R\in L_T^*}\tilde{\gamma}_T W(R)\geq\sup_{R\in L_T^{**}(M)}\tilde{\gamma}_T W(R)-4\sup_{R\in L_T'(M)}\tilde{\gamma}_T|W(R)|.\tag{2.3.46}$$

在 (2.3.36) 中, 取 $M=M_T=\exp\{\tilde{\Delta}_T^{\varepsilon/2}\}$, 则

$$P\Big\{\sup_{R\in L_T^{**}(M_T)}\tilde{\gamma}_T W(R)\leq 1-\varepsilon\Big\}\leq\exp\{-c\tilde{\Delta}_T^{\varepsilon/2}\log\log T\}.\tag{2.3.47}$$

由 (iii), 存在 $r>1$ 使得对充分大的 T 有

$$\log b_T^2T^{-1}+1\geq(\log\log T)^r.$$

由定理 2.3.3 对充分大的 T 有

$$
\begin{aligned}
&P\Big\{\sup_{R\in L'_T(M_T)}\tilde{\gamma}_T|W(R)|>\varepsilon\Big\}\\
&\quad\le cM_T(\log M_T+1)(\log b_TT^{-1/2}+\log M_T^{1/2}+1)\\
&\qquad\cdot\exp\Big\{-\frac{2\varepsilon^2}{2+\varepsilon}M_T\log\tilde{\Delta}_T\Big\}\\
&\quad\le cM_T(\log M_T+1)(\tilde{\Delta}_T^{\frac{r}{r-1}}+\log M_T)\exp\Big\{-\frac{2\varepsilon^2}{2+\varepsilon}M_T\log\tilde{\Delta}_T\Big\}\\
&\quad\le\exp(-M_T)\le\exp\{-\exp((\log\log T)^{\frac{\varepsilon}{2}(r-1)})\}\\
&\quad\le\exp\{-(\log\log T)^2\}.
\end{aligned}\tag{2.3.48}
$$

综合 (2.3.46)—(2.3.48) 得

$$
\begin{aligned}
&P\Big\{\sup_{R\in L_T^*}\tilde{\gamma}_TW(R)\le1-5\varepsilon\Big\}\\
&\quad\le\exp\{-c\tilde{\Delta}_T^{\varepsilon/2}\log\log T\}+\exp\{-(\log\log T)^2\}.
\end{aligned}\tag{2.3.49}
$$

注意到 $\tilde{\Delta}_T\to\infty$ 和 $\log T_k\ge k^{\frac{1}{3}}$, 由 (2.3.49) 和 Borel-Cantelli 引理得

$$
\liminf_{k\to\infty}\sup_{R\in L_{T_k}^*}\tilde{\gamma}_{T_k}W(R)\ge1-5\varepsilon\quad\text{a.s.}\tag{2.3.50}
$$

由 (2.3.42) 和 (2.3.50) 得证当 (iii) 满足时, (2.3.34) 对 $\rho=1$ 也成立.

最后注意到若条件 (iii) 满足, 则

$$
\frac{\log(1+\log Ta_T^{-1})}{\log Ta_T^{-1}+\log(\log b_Ta_T^{-1/2}+1)-\log\log\log T}\to0\quad(T\to\infty),\tag{2.3.51}
$$

并且

$$
\log(1+\log b_Ta_T^{-1/2})\le\log(1+\log b_T^2T^{-1})+\log(1+\log Ta_T^{-1}),
$$

我们知 $\gamma_T/\tilde{\gamma}_T\to1$, $\gamma_T/\tilde{\delta}_T\to1$, 且条件 (iv) 和 (iv′) 满足. 从而由第一步和第二步即得证定理 2.3.2.

推论 2.3.1 的证明 设条件 (iii′) 成立. 若 $r>1$, 则 (2.3.4) 由 (2.3.3) 即得. 若 $r=1$, 则用 $\log\log T$ 代替 Δ_T, (2.3.4) 的证明与定理 2.3.2 的第一步证明类似, 其中只有 (2.3.30) 要作如下修正.

$$
\begin{aligned}
&P\Big\{\sup_{R\in L_{T_{n+1}}}\{2a_{T_{n+1}}\log\log\log T_{n+1}\}^{1/2}|W(R)|\le\varepsilon\Big\}\\
&\ge\exp\Big\{-c\cdot\exp\Big(-\varepsilon'\log\log\log T_{n+1}\\
&\qquad+\frac{\log(\Delta_{T_{n+1}}\log\log T_{n+1})}{\log\log\log T_{n+1}}\log\log\log T_{n+1}\Big)\Big\}\\
&\ge\exp\Big\{-c\cdot\exp\Big(\Big(1-\frac{\varepsilon'}{2}\Big)\log\log\log T_{n+1}\Big)\Big\}\\
&\ge\exp\Big(-c(\log\log T_{n+1})^{-\varepsilon'/2}\log\log T_{n+1}\Big)\\
&\ge(n+1)^{1/2},
\end{aligned}
\tag{2.3.30′}
$$

其中 $\varepsilon'=\frac{2\varepsilon^2}{2+\varepsilon}>0$.

由定理 2.3.2 的证明我们得下述推论.

推论 2.3.2 设定理 2.3.2 中的条件 (i) 和 (ii) 满足. 若 (2.3.51) 成立, 则

$$\liminf_{T\to\infty}\sup_{R\in L_T}\gamma_T|W(R)|=1\quad\text{a.s.}$$

进一步, $\lim_{T\to\infty}a_T/T<1$ 或 (iii) 成立, 则

$$\liminf_{T\to\infty}\sup_{R\in L_T^*}\gamma_T W(R)=1\quad\text{a.s.}$$

猜测 我们猜测, 若第二步证明中的条件, (i), (ii″) 和 (iv′) 满足, 则

$$\liminf_{T\to\infty}\sup_{R\in L_T}\tilde{\gamma}_T|W(R)|=\liminf_{T\to\infty}\sup_{R\in L_T^*}\tilde{\gamma}_T|W(R)|=1\quad\text{a.s.}$$

定理 2.3.1 和 2.3.2 可以推广到阶为 α $(0<\alpha<1)$ 的两参数分数 Wiener 过程, 并且 “a_T 和 T/a_T 是 T 的非降函数” 和 “δ_T 或 γ_T 是 T 的正则非增函数” 这两个条件可以去掉.

设 $\{Z(x,y);x,y\geq 0\}$ 是阶为 α $(0<\alpha<1)$ 的两参数分数 Wiener 过程，即它是一零均值的 Gauss 过程， $Z(0,0)=0$ a.s. 且协方差函数为

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}Z(x_1,y_1)Z(x_2,y_2)\\&=\left\{|x_1|^{2\alpha}+|x_2|^{2\alpha}-|x_2-x_1|^{2\alpha}\right\}\left\{|y_1|^{2\alpha}+|y_2|^{2\alpha}-|y_2-y_1|^{2\alpha}\right\}/4.\end{aligned}$$

显然，当 $\alpha=1/2$ 时， $Z(\cdot,\cdot)$ 即为两参数 Wiener 过程. 现重新定义 δ_T,γ_T 如下：

$$\begin{aligned}\delta_T=&\{2a_T^{2\alpha}(\log Ta_T^{-1}+\log(\log b_Ta_T^{-1/2}+1)+\log\log T)\}^{-1/2},\\\gamma_T=&\{2a_T^{2\alpha}(\log Ta_T^{-1}+\log(\log b_Ta_T^{-1/2}+1)-\log\log\log T)\}^{-1/2}.\end{aligned}$$

陆传荣，张立新，王尧弘 (2001) 得到了如下大增量结果.

定理 2.3.4 设 $0<a_T\leq T$ 和 $b_T\geq\sqrt{T}$ 都为 T 的函数. 假设 b_T 拟增. 则

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{R\in L_T^*}\delta_TZ(R)=\limsup_{T\to\infty}\sup_{R\in L_T}\delta_T|Z(R)|=1\quad\text{a.s.}$$

若还有定理 2.3.1 中的条件 (2.3.2) 成立，则

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{R\in L_T^*}\delta_TZ(R)=\lim_{T\to\infty}\sup_{R\in L_T}\delta_T|Z(R)|=1\quad\text{a.s.}$$

定理 2.3.5 设 $0<a_T\leq T$ 和 $b_T\geq\sqrt{T}$ 都为 T 的函数. 假设 b_T 拟增. 若定理 2.3.2 中的条件 (iii) 成立. 则

$$\liminf_{T\to\infty}\sup_{R\in L_T^*}\gamma_TZ(R)=\liminf_{T\to\infty}\sup_{R\in L_T}\gamma_T|Z(R)|=1\quad\text{a.s.}$$

定理 2.3.4 和 2.3.5 的证明比较繁琐，证明思路与定理 2.3.1, 2.3.2 和 2.2.4 的有些类似，故从略.

§ 2.4 两参数分数 Lévy-Wiener 过程

令 $\{X(x,y);0\le x,y<\infty\}$ 为一个阶为 α $(0<\alpha<1)$ 的两参数分数 Lévy-Wiener 过程, 即 $\{X(x,y);0\le x,y<\infty\}$ 为几乎处处连续的、零均值平稳实值 Gauss 过程, $X(0,0)=0$ 且对任意非负的 x_1,y_1,x_2,y_2 成立

$$E\{X(x_1,y_1)-X(x_2,y_2)\}^2=\{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\}^{\alpha}. \quad (2.4.1)$$

当 $\alpha=1/2$ 时, $\{X(x,y);0\le x,y<\infty\}$ 是两参数 Lévy-Wiener 过程, 即此时它是满足下述条件的 Gauss 过程:

(a) $X(0,0)=0$ a.s.,

(b) 对任何 x 和 y, $X(x,y)$ 是零均值的正态变量,

(c) $E\{X(x_1,y_1)-X(x_2,y_2)\}^2=\{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\}^{1/2}$,

(d) 样本轨道 $(x,y)\mapsto X(\omega;x,y)$ 关于 (x,y) a.s. 连续.

考察矩形 $R:=R(s,t,u,v)=[s,s+t]\times[u,u+v]\subset\mathcal{R}_+^2$ $(s,u\ge 0,$ $t,v>0)$, 定义两参数分数 Lévy-Wiener 过程在 R 上的增量 $X(R)$ 为

$$\begin{aligned}X(R):=&X(R(s,t,u,v))\\ =&X(s+t,u+v)-X(s,u+v)-X(s+t,u)+X(s,u).\end{aligned}$$

由 (2.4.1) 易知 $X(R)$ 的标准差具有关于 s 和 u 的平移不变性. 记

$$S(t,v)=\left\{E\big(X(R(s,t,u,v))\big)^2\right\}^{1/2}.$$

对 $0<T<\infty$, 令 A_T 和 B_T 为非降连续函数, a_T 和 b_T 为连续函数, 满足 $0<a_T\le A_T$ 和 $0<b_T\le B_T$. 定义

$$G_T=\Big(\frac{A_T-a_T}{a_T}\vee 1\Big)\Big(\frac{B_T-b_T}{b_T}\vee 1\Big),$$

$$\beta_T = \left\{2(\log G_T + \log\log A_T + \log\log B_T)\right\}^{1/2},$$

和

$$D_1(A_T, B_T, a_T, b_T)$$
$$= \sup_{0\le s\le A_T-a_T}\ \sup_{0\le t\le a_T}\ \sup_{0\le u\le B_T-b_T}\ \sup_{0\le v\le b_T} \frac{|X(R(s,t,u,v))|}{S(a_T,b_T)\beta_T},$$
$$D_2(A_T, B_T, a_T, b_T) = \sup_{0\le s\le A_T-a_T}\ \sup_{0\le u\le B_T-b_T} \frac{|X(R(s,a_T,u,b_T))|}{S(a_T,b_T)\beta_T}.$$

Lin 和 Choi(1998) 证明了下述结果.

定理 2.4.1 设 $\{X(x,y); 0\le x,y<\infty\}$ 为阶为 α $(0<\alpha<1)$ 的两参数分数 Lévy- Wiener 过程. 对 $0<T<\infty$, 令 A_T 和 B_T 为非降连续函数, a_T 和 b_T 为连续函数, 满足

(i) $0<a_T\le A_T$, $0<b_T\le B_T$,

(ii) 当 A_T 有界时, a_T 趋于零, 否则, $\liminf_{T\to\infty} a_T>0$; B_T 与 b_T 也是如此,

(iii) 对某 $0<c_1\le c_2<\infty$ 成立

$$c_1 \le \liminf_{T\to\infty}\frac{a_T}{b_T} \le \limsup_{T\to\infty}\frac{a_T}{b_T} \le c_2.$$

则我们有

$$\limsup_{T\to\infty} D_1(A_T,B_T,a_T,b_T) \le 1 \quad \text{a.s.} \tag{2.4.2}$$

如果进一步还满足下述条件:

(iv) $\lim_{T\to\infty}\log G_T/(\log\log A_T+\log\log B_T)=\infty$,

则我们有

$$\liminf_{T\to\infty} D_2(A_T,B_T,a_T,b_T) \ge 1 \quad \text{a.s.} \tag{2.4.3}$$

因此, 在条件 (i)—(iv) 下我们有

$$\lim_{T\to\infty} D_1(A_T,B_T,a_T,b_T) = \lim_{T\to\infty} D_2(A_T,B_T,a_T,b_T) = 1 \quad \text{a.s.}$$

注 2.4.1 由上述定理，当 A_T, B_T, a_T, b_T 都趋于无穷时，我们就得到了有关 $\{X(x,y)\}$ 的大增量的结果；当 A_T, B_T 有界且 a_T, b_T 趋于零时，我们就得到了 $\{X(x,y)\}$ 的连续模.

例 2.4.1 设 $\{X(x,y);0\le x,y<\infty\}$ 为两参数 Lévy-Wiener 过程，这时 $\alpha=1/2$. 当 $A_T=T$, $B_T=T^{3/2}$, $a_T=\sqrt{T}$, $b_T=\sqrt{T}/2$ 时，条件 (i)—(iv) 满足，且 $\beta_T\sim(3\log T)^{1/2}$, $S(a_T,b_T)=\sqrt{3-\sqrt{5}}T^{1/4}$ (参见下文的 (2.4.15)). 从而我们有大增量结果:

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le s\le T-\sqrt{T}}\sup_{0\le t\le\sqrt{T}}\sup_{0\le u\le T^{3/2}-\sqrt{T}/2}\sup_{0\le v\le\sqrt{T}/2}\frac{|X(R(s,t,u,v))|}{T^{1/4}(\log T)^{1/2}}$$
$$=\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le s\le T-\sqrt{T}}\sup_{0\le u\le T^{3/2}-\sqrt{T}/2}\frac{|X(R(s,\sqrt{T},u,\sqrt{T}/2))|}{T^{1/4}(\log T)^{1/2}}$$
$$=\sqrt{3(3-\sqrt{5})}\quad\text{a.s.}$$

当 $A_T=B_T=1$, $a_T=1/T$, $b_T=1/2T$ 时，条件 (i)—(iv) 也满足，且 $\beta_T\sim2(\log T)^{1/2}$, $S(a_T,b_T)=\sqrt{3-\sqrt{5}}T^{-1/2}$. 从而我们有连续模结果:

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le s\le1-1/T}\sup_{0\le t\le1/T}\sup_{0\le u\le1-1/2T}\sup_{0\le v\le1/2T}\frac{|X(R(s,t,u,v))|}{T^{-1/2}(\log T)^{1/2}}$$
$$=\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le s\le1-1/T}\sup_{0\le u\le1-1/2T}\frac{|X(R(s,T^{-1},u,T^{-1}/2))|}{T^{-1/2}(\log T)^{1/2}}$$
$$=2\sqrt{3-\sqrt{5}}\quad\text{a.s.}$$

下述引理 2.4.1—2.4.4 是证明定理 2.4.1 的关键. 令 $\mathcal{D}=\{\mathbf{t};\mathbf{t}=(t_1,\cdots,t_d),a_i\le t_i\le b_i,i=1,2,\cdots,d\}$ 为实值的 d 维时间参数空间，$\|\cdot\|$ 为其上通常意义下的 Euclidean 范数. 设 $\{X(\mathbf{t});t\in\mathcal{D}\}$ 为零均值的实值可分 Gauss 过程. 假设

$$0<\sup_{\mathbf{t}\in\mathcal{D}}E\{X(\mathbf{t})\}^2=:\Gamma^2<\infty,\qquad(2.4.4)$$

和

$$E\{X(\mathbf{t})-X(\mathbf{s})\}^2 \le \varphi^2(\|\mathbf{t}-\mathbf{s}\|), \tag{2.4.5}$$

其中 $\varphi(\cdot)$ 为非降连续函数，满足 $\int_0^\infty \varphi(e^{-y^2})\,dy < \infty$.

下述引理是 Fernique 不等式 (定理 1.1.3) 的一个类比 (参见 Choi 和 Lin 1998).

引理 2.4.1 设 $\{X(\mathbf{t});\mathbf{t}\in\mathcal{D}\}$ 为上述所示. 则对 $\lambda>0$, $x\ge 1$ 和 $A>\sqrt{2d\log 2}$, 有

$$P\Big\{\sup_{\mathbf{t}\in\mathcal{D}} X(\mathbf{t}) \ge x\Big(\Gamma+(2\sqrt{2}+2)A\int_0^\infty \varphi(\sqrt{d}\lambda 2^{-y^2})\,dy\Big)\Big\}$$
$$\le (2^d+B)\Big(\prod_{i=1}^d \big(\frac{b_i-a_i}{\lambda}\vee 1\big)\Big)e^{-x^2/2},$$

其中 $B=\sum_{n=1}^\infty \exp\{-2^{n-1}(A^2-2d\log 2)\}<\infty$.

证明 对每个 $n=0,1,2,\cdots$, 记 $\epsilon_n=\lambda 2^{-2^n}$, $\lambda>0$. 对 $\mathbf{k}=(k_1,\cdots,k_d)$, 其中 $k_i=0,1,\cdots,k_{in}:=[(b_i-a_i)/\epsilon_n]$, $i=1,\cdots,d$, 定义 $\mathbf{t}_{\mathbf{k}}^{(n)}=(t_{1k_1}^{(n)},\cdots,t_{dk_d}^{(n)})\in\mathcal{D}$, 其中

$$t_{ik_i}^{(n)}=a_i+k_i\epsilon_n,\ i=1,\cdots,d.$$

令

$$S_n=\{\mathbf{t}_{\mathbf{k}}^{(n)};\mathbf{k}=\mathbf{0},\cdots,\mathbf{k}_n:=(k_{1n},\cdots,k_{dn})\},$$

它包含了 $N_n:=\prod_{i=1}^d k_{in}$ 个点且 $N_n\le 2^{2^n d}\prod_{i=1}^d(b_i-a_i)/\lambda$. 那么，集合 $\bigcup_{n=0}^\infty S_n$ 在 $\mathcal{D}$ 中稠密且 $S_n\subset S_{n+1}$. 对 $x\ge 1$ 和 $A>\sqrt{2d\log 2}$, 令

$$x_m=xA\varphi(\sqrt{d}\epsilon_{m-1})2^{m/2},\ m\ge 1.$$

对 $m\ge 1$, 令 $\delta_m=2^{(m-1)/2}$. 则

$$2^{m/2}=2(\sqrt{2}+1)(\delta_m-\delta_{m-1}).$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} x_m =& xA\sum_{m=1}^{\infty}\varphi\big(\sqrt{d}\lambda 2^{-2^{m-1}}\big)2^{m/2}\\ =& xA\sum_{m=1}^{\infty}\varphi\big(\sqrt{d}\lambda 2^{-\delta_m^2}\big)(2\sqrt{2}+2)(\delta_m-\delta_{m-1})\\ \le&(2\sqrt{2}+2)xA\sum_{m=1}^{\infty}\int_{\delta_{m-1}}^{\delta_m}\varphi\big(\sqrt{d}\lambda 2^{-y^2}\big)\,dy\\ \le&(2\sqrt{2}+2)xA\int_0^{\infty}\varphi\big(\sqrt{d}\lambda 2^{-y^2}\big)\,dy. \end{aligned}\tag{2.4.6}$$

因此，由 (2.4.4) 得

$$\begin{aligned}&P\Big\{\sup_{\mathbf{t}\in\mathcal{D}}X(\mathbf{t})>x(\Gamma+(2\sqrt{2}+2)A\int_0^{\infty}\varphi\big(\sqrt{d}\lambda 2^{-y^2}\big)\,dy\Big\}\\ &\le P\Big\{\sup_{\mathbf{t}\in\mathcal{D}}X(\mathbf{t})\ge x\Gamma+\sum_{m=1}^{\infty}x_m\Big\}\\ &=P\Big\{\max_{n\ge 0}\sup_{\mathbf{t}\in S_n}X(\mathbf{t})\ge x\Gamma+\sum_{m=1}^{\infty}x_m\Big\}\\ &\le\lim_{n\to\infty}P\Big\{\sup_{\mathbf{t}\in S_n}X(\mathbf{t})\ge x\Gamma+\sum_{m=1}^{\infty}x_m\Big\}. \end{aligned}\tag{2.4.7}$$

对 $n\ge 0$, 令

$$A_n=\Big\{\sup_{\mathbf{t}\in S_n}X(\mathbf{t})\ge x\Gamma+\sum_{m=1}^{\infty}x_m\Big\}.$$

由归纳法得

$$\begin{aligned}P(A_n)=&P(A_n\cap A_{n-1})+P(A_n\cap A_{n-1}^c)\\ \le&P(A_{n-1})+P(A_n\cap A_{n-1}^c)\\ \le&P(A_{n-2})+P(A_{n-1}\cap A_{n-2}^c)+P(A_n\cap A_{n-1}^c)\end{aligned}$$

$$\le P(A_0)+\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n\cap A_{n-1}^c)$$

$$\le P(B_0)+\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n\cap B_{n-1}^c), \tag{2.4.8}$$

其中

$$B_0=\left\{\sup_{\mathbf{t}\in S_0}X(\mathbf{t})\ge x\Gamma\right\},\ B_n=\left\{\sup_{\mathbf{t}\in S_n}X(\mathbf{t})\ge\sum_{m=1}^{\infty}x_m\right\},\ n\ge 1.$$

现在对 $n\ge 1$, 我们有

$$\begin{aligned}
&P(B_n\cap B_{n-1}^c)\\
=&P\left\{\left\{\sup_{\mathbf{t}\in S_n}X(\mathbf{t})\ge\sum_{m=1}^{n}X_m\right\}\cap\left\{\sup_{\mathbf{s}\in S_{n-1}}X(\mathbf{s})<\sum_{m=1}^{n-1}X_m\right\}\right\}\\
\le&P\left\{\bigcup_{\mathbf{t}\in S_n}\left\{X(\mathbf{t})\ge\sum_{m=1}^{n}X_m\right\}\cap\bigcap_{\mathbf{s}\in S_{n-1}}\left\{X(\mathbf{s})<\sum_{m=1}^{n-1}x_m\right\}\right\}\\
\le&P\Big\{\bigcup_{\mathbf{t}\in S_n-S_{n-1}}\ \bigcup_{\substack{\mathbf{s}\in S_{n-1}\\ \|\mathbf{t}-\mathbf{s}\|\le\sqrt{d}\epsilon_{n-1}}}\{X(\mathbf{t})-X(\mathbf{s})\ge x_n\}\Big\}\\
\le&\sum_{\mathbf{t}\in S_n}\ \sum_{\substack{\mathbf{s}\in S_{n-1}\\ \|\mathbf{t}-\mathbf{s}\|\le\sqrt{d}\epsilon_{n-1}}}P\big\{X(\mathbf{t})-X(\mathbf{s})\ge x_n\big\}.
\end{aligned} \tag{2.4.9}$$

然而由假设 (2.4.5), 我们得

$$E\{X(\mathbf{t})-X(\mathbf{s})\}^2\le\varphi^2(\|\mathbf{t}-\mathbf{s}\|)\le\varphi^2(\sqrt{d}\epsilon_{n-1}),\ n\ge 1. \tag{2.4.10}$$

从而，注意到 $A>\sqrt{2d\log 2}$, $x\ge 1$, 并且对任何 $\mathbf{t}\in S_n-S_{n-1}$, 仅有一个点 $\mathbf{s}\in\{\mathbf{s}\in S_{n-1}:\|\mathbf{t}-\mathbf{s}\|\le\sqrt{d}\epsilon_{n-1}\}$, 由 (2.4.10) 知 (2.4.9) 蕴涵了

$$P(B_n\cap B_{n-1}^c)\le\sum_{\mathbf{t}\in S_n}\ \sum_{\substack{\mathbf{s}\in S_{n-1}\\ \|\mathbf{t}-\mathbf{s}\|\le\sqrt{d}\epsilon_{n-1}}}P\left\{N(0,1)\ge\frac{x_n}{\varphi(\sqrt{d}\epsilon_{n-1})}\right\}$$

$$\leq \Big(\prod_{i=1}^{d}\frac{b_i-a_i}{\lambda}\Big)(2^{2^n})^d P\left\{N(0,1)\geq \frac{x_n}{\varphi(\sqrt{d}\epsilon_{n-1})}\right\}$$

$$=2^{2^n d}\Big(\prod_{i=1}^{d}\frac{b_i-a_i}{\lambda}\Big)P\Big\{N(0,1)\geq Ax2^{n/2}\Big\}$$

$$\leq 2^{2^n d}\Big(\prod_{i=1}^{d}\frac{b_i-a_i}{\lambda}\Big)\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-A^2x^2 2^{n-1}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Big(\prod_{i=1}^{d}\frac{b_i-a_i}{\lambda}\Big)2^{2^n d}e^{-(A^2 2^{n-1}-1/2)x^2}e^{-x^2/2}$$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Big(\prod_{i=1}^{d}\frac{b_i-a_i}{\lambda}\Big)e^{2^n d\log 2-2^{n-1}A^2+1/2}e^{-x^2/2}$$

$$\leq e^{-2^n(A^2/2-d\log 2)}\Big(\prod_{i=1}^{d}\Big(\frac{b_i-a_i}{\lambda}\vee 1\Big)\Big)e^{-x^2/2},$$

其中 $N(0,1)$ 表示标准正态变量. 特别地, 如果 $A>0$ 满足

$$\frac{A^2}{2}-d\log 2>0,$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n\cap B_{n-1}^c)\leq B\Big(\prod_{i=1}^{d}\Big(\frac{b_i-a_i}{\lambda}\vee 1\Big)\Big)e^{-x^2/2}, \qquad (2.4.11)$$

其中

$$B=\sum_{n=1}^{\infty}\exp\big\{-2^{n-1}(A^2-2d\log 2)\big\}<\infty.$$

另一方面,

$$P(B_0)=P\Big\{\sup_{\mathbf{s}\in S_0}X(\mathbf{t})\geq x\Gamma\Big\}$$

$$\le 2^d\Big(\prod_{i=1}^{d}\Big(\frac{b_i-a_i}{\lambda}\vee 1\Big)\Big)P\{N(0,1)\ge x\}$$

$$\le 2^d\Big(\prod_{i=1}^{d}\Big(\frac{b_i-a_i}{\lambda}\vee 1\Big)\Big)e^{-x^2/2}. \tag{2.4.12}$$

由 (2.4.8), (2.4.11) 和 (2.4.12) 得: 对任何 $n\ge 0$,

$$P(A_n)\le (2^d+B)\Big(\prod_{i=1}^{d}\Big(\frac{b_i-a_i}{\lambda}\vee 1\Big)\Big)e^{-x^2/2}. \tag{2.4.13}$$

从而由 (2.4.13) 和 (2.4.7) 得

$$P\Big\{\sup_{\mathbf{t}\in\mathcal{D}} X(\mathbf{t})>x\big(\Gamma+2\sqrt{2}+2\big)A\int_0^\infty \varphi(\sqrt{d}\lambda 2^{-y^2})\,dy\big)\Big\}$$

$$\le (2^d+B)\Big(\prod_{i=1}^{d}\Big(\frac{b_i-a_i}{\lambda}\vee 1\Big)\Big)e^{-x^2/2}.$$

引理 2.4.1 得证.

引理 2.4.2 设 $p>0$, N,m 和 a 为非零实数. 则存在常数 $c_0>0$ 使得

$$\left|\int_{\sqrt{a^2+N^2m^2p^2}}^{\sqrt{a^2+(Nm+1)^2p^2}} d(x^{2\alpha})-\int_{\sqrt{a^2+(Nm-1)^2p^2}}^{\sqrt{a^2+N^2m^2p^2}} d(x^{2\alpha})\right|$$

$$\le c_0\frac{\{a^2+(|Nm|+1)^2p^2\}^{\alpha}p^2}{a^2+(|Nm|-1)^2p^2}.$$

证明 记 $b=(|Nm|-1)p$, $c=|Nm|p$ 和 $d=(|Nm|+1)p$. 则

$$\int_{\sqrt{a^2+c^2}}^{\sqrt{a^2+d^2}} d(x^{2\alpha})-\int_{\sqrt{a^2+b^2}}^{\sqrt{a^2+c^2}} d(x^{2\alpha})$$

$$=\int_{\sqrt{a^2+b^2}}^{\sqrt{a^2+d^2}+\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}} d((x+\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a^2+b^2})^{2\alpha})$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\sqrt{a^2+b^2}}^{\sqrt{a^2+c^2}} d(x^{2\alpha}) \\
=&\int_{\sqrt{a^2+b^2}}^{\sqrt{a^2+d^2}+\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}} \Big(\frac{d((x+\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a^2+b^2})^{2\alpha})}{dx} \\
&-\frac{d(x^{2\alpha})}{dx}\Big)\,dx+\int_{\sqrt{a^2+c^2}}^{\sqrt{a^2+d^2}+\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}} \frac{d(x^{2\alpha})}{dx}\,dx \\
=&\int_{\sqrt{a^2+b^2}}^{\sqrt{a^2+d^2}+\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}} \Big(\int_x^{x+\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a^2+b^2}} \frac{d^2(y^{2\alpha})}{dy^2}dy\Big)\,dx \\
&+\int_{\sqrt{a^2+c^2}}^{\sqrt{a^2+d^2}+\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}} \frac{d(x^{2\alpha})}{dx}\,dx \\
=:&\, I+J.
\end{aligned}
$$

我们首先估计 I 的上界. 事实上, 存在常数 $c_1>0$ 使得

$$
\begin{aligned}
|I|=&\Big|\int_{\sqrt{a^2+b^2}}^{\sqrt{a^2+d^2}+\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}} \Big(\int_x^{x+\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a^2+b^2}} (2\alpha(2\alpha \\
&-1)\frac{y^{2\alpha}}{y^2})dy\Big)\,dx\Big| \\
\le& c_1\int_{\sqrt{a^2+b^2}}^{\sqrt{a^2+d^2}+\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}} \frac{(x+\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a^2+b^2})^{2\alpha}}{x^2} \\
&\cdot(\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a^2+b^2})\,dx \\
\le& c_1\frac{(a^2+d^2)^\alpha}{a^2+b^2}(\sqrt{a^2+d^2}-\sqrt{a^2+c^2})(\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a^2+b^2}) \\
=& c_1\frac{(a^2+d^2)^\alpha(d^2-c^2)(c^2-b^2)}{(a^2+b^2)(\sqrt{a^2+d^2}+\sqrt{a^2+c^2})(\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{a^2+b^2})} \\
\le& c_1\frac{(a^2+d^2)^\alpha}{a^2+b^2}(d-c)(c-b)=c_1\frac{(a^2+(|Nm|+1)^2p^2)^\alpha p^2}{a^2+(|Nm|-1)^2p^2}.
\end{aligned}
$$

对 J, 存在常数 $c_2>0$ 使得

$$
J=\int_{\sqrt{a^2+c^2}}^{\sqrt{a^2+d^2}+\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}} \Big(2\alpha\frac{x^{2\alpha}}{x}\Big)\,dx
$$

$$
\begin{aligned}
&\le c_2\frac{(\sqrt{a^2+d^2})^{2\alpha}}{\sqrt{a^2+c^2}}\left(\sqrt{a^2+d^2}-\sqrt{a^2+c^2}-(\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a^2+b^2})\right)\\
&\le c_2\frac{(a^2+d^2)^{\alpha}}{\sqrt{a^2+c^2}}\left(\frac{d^2-c^2}{\sqrt{a^2+d^2}+\sqrt{a^2+c^2}}-\frac{c^2-b^2}{\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{a^2+b^2}}\right)\\
&=c_2\frac{(a^2+d^2)^{\alpha}}{\sqrt{a^2+c^2}}\left(\frac{2|Nm|+1}{\sqrt{a^2+d^2}+\sqrt{a^2+c^2}}-\frac{2|Nm|-1}{\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{a^2+b^2}}\right)p^2\\
&=c_2\frac{(a^2+d^2)^{\alpha}}{\sqrt{a^2+c^2}}\Big\{\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+d^2}+\sqrt{a^2+c^2}}-\frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{a^2+b^2}}\right)\\
&\quad\cdot(2|Nm|)p^2+\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+d^2}+\sqrt{a^2+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{a^2+b^2}}\right)p^2\Big\}\\
&\le c_2\frac{(a^2+d^2)^{\alpha}}{\sqrt{a^2+c^2}}\frac{2p^2}{\sqrt{a^2+c^2}}=2c_2\frac{(a^2+d^2)^{\alpha}p^2}{a^2+c^2}\\
&=2c_2\frac{\left(a^2+(|Nm|+1)^2p^2\right)^{\alpha}p^2}{a^2+N^2m^2p^2}.
\end{aligned}
$$

综合 I 和 J 的上界，得证引理 2.4.2.

下述引理可在 Leadbetter 等 (1983) 中找到.

引理 2.4.3 设 $\{\xi_{ij}; i,j=1,2,\cdots,n\}$ 为多元标准正态随机变量，其协方差 $\mathrm{Cov}(\xi_{ij},\xi_{i'j'})=\Lambda_{ij}^{i'j'}$ 满足

$$\delta:=\max_{(i,j)\neq(i'j')}|\Lambda_{ij}^{i'j'}|<1.$$

则对任何实数 u 和整数 $1\le l_1<l_2<\cdots<l_f\le n$, $1\le l_1'<l_2'<\cdots<l_g'\le n$, $f,g\le n$, 有

$$
\begin{aligned}
&P\left\{\max_{1\le i\le f}\max_{1\le j\le g}\xi_{l_il_j'}\le u\right\}\\
&\qquad\le\left\{\Phi(u)\right\}^{fg}+c\sum_{(i,j)\neq(i',j')}|\lambda_{ij}^{i'j'}|\exp\left(-\frac{u^2}{1+|\lambda_{ij}^{i'j'}|}\right), \quad (2.4.14)
\end{aligned}
$$

其中 $\lambda_{ij}^{i'j'}=\Lambda_{l_il_j'}^{l_{i'}l_{j'}'}$, 且 $c=c(\delta)$ 为不依赖于 n,u,f 和 g 的常数.

为了估计 (2.4.14) 右边第二项的上界，我们需要下述引理:

引理 2.4.4 设 $\{\xi_{ij}\}, \delta, f, g$ 和 $\lambda_{ij}^{i'j'}$ 如引理 2.4.3 所示. 假设

$$|\lambda_{ij}^{i'j'}| < \left(|i-i'||j-j'|\right)^{-\nu}, \quad i \neq i', j \neq j',$$

并令 $u = \sqrt{(2-\eta)\log(fg)}$, 其中 ν 和 η 为正常数, 满足 $0 < \eta < (1-\delta)\nu/(1+\nu+\delta)$. 则有

$$\sum := \sum_{(i,j)\neq(i',j')} |\lambda_{ij}^{i'j'}| \exp\left(-\frac{u^2}{1+|\lambda_{ij}^{i'j'}|}\right) \le c_0 (fg)^{-\delta_0},$$

其中 $\delta_0 = \{\nu(1-\delta) - \eta(1+\delta+\nu)\}/\{(1+\nu)(1+\delta)\} > 0$, c_0 为不依赖于 n, f 和 g 的正常数.

证明 令 a 使得 $0 < a = (1+\eta\delta-\delta)/\{(1+\nu)(1+\delta)\} < 1$. 我们把和式 $\sum$ 分成下述四个部分:

$$\begin{aligned}
\sum :=& \sum_{\substack{1\le i,i'\le f\\ 0<|i-i'|\le[f^\alpha]}} \sum_{\substack{1\le j,j'\le g\\ 0<|j-j'|\le[g^\alpha]}} |\lambda_{ij}^{i'j'}| \exp\left(-\frac{u^2}{1+|\lambda_{ij}^{i'j'}|}\right)\\
&+ \sum_{\substack{1\le i,i'\le f\\ |i-i'|>[f^\alpha]}} \sum_{\substack{1\le j,j'\le g\\ |j-j'|>[g^\alpha]}} |\lambda_{ij}^{i'j'}| \exp\left(-\frac{u^2}{1+|\lambda_{ij}^{i'j'}|}\right)\\
&+ \sum_{\substack{1\le i,i'\le f\\ |i-i'|\le[f^\alpha]}} \sum_{\substack{1\le j,j'\le g\\ |j-j'|>[g^\alpha]}} |\lambda_{ij}^{i'j'}| \exp\left(-\frac{u^2}{1+|\lambda_{ij}^{i'j'}|}\right)\\
&+ \sum_{\substack{1\le i,i'\le f\\ |i-i'|>[f^\alpha]}} \sum_{\substack{1\le j,j'\le g\\ |j-j'|\le[g^\alpha]}} |\lambda_{ij}^{i'j'}| \exp\left(-\frac{u^2}{1+|\lambda_{ij}^{i'j'}|}\right)\\
=:& \sum\nolimits^{(1)} + \sum\nolimits^{(2)} + \sum\nolimits^{(3)} + \sum\nolimits^{(4)}.
\end{aligned}$$

现在我们来分别估计上述四个和的上界:

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits^{(1)} \le& c(fg)^{1+a} \exp\left(-\frac{2-\eta}{1+\delta}\log(fg)\right) = c(fg)^{1+a-\{(2-\eta)/(1+\delta)\}}\\
=& c(fg)^{\{\eta(1+\delta+\nu)-\nu(1-\delta)\}/\{(1+\nu)(1+\delta)\}} = c(fg)^{-\delta_0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits^{(2)} \le& c(fg)^{2-a\nu}\exp\big(-(1-|\lambda_{ij}^{i'j'}|)u^2\big)\\
\le& c(fg)^{2-a\nu}\exp\big(-(2-\eta)\log(fg)-(fg)^{-a\nu}(2-\eta)\log(fg)\big)\\
\le& c(fg)^{\eta-a\nu}=c(fg)^{-\delta_0},\\
\sum\nolimits^{(3)} \le& cf^{1+a}g^{2-a\nu}\exp\Big(-\frac{(2-\eta)\log g+(2-\eta)\log f}{1+|\lambda_{ij}^{i'j'}|}\Big)\\
\le& cf^{1+a}\exp\Big(-\frac{2-\eta}{1+\delta}\log f\Big)g^{2-a\nu}\\
&\cdot\exp\big(-(1-g^{-a\nu})(2-\eta)\log g\big)\\
\le& cf^{1+a-\{(2-\eta)/(1+\delta)\}}g^{\eta-a\nu}=c(fg)^{-\delta_0},\\
\sum\nolimits^{(4)} \le& cf^{2-2a\nu}g^{1+a}\exp\Big(-\frac{2-\eta}{1+\delta}\log g\Big)\\
&\cdot\exp\big(-(2-\eta)(1-f^{-2a\nu})\log f\big)\\
\le& cg^{1+a-\{(2-\eta)/(1+\delta)\}}f^{\eta-a\nu}=c(fg)^{-\delta_0}.
\end{aligned}$$

由此，引理得证.

现在我们来证明定理 2.4.1.

定理 2.4.1 的证明 由关系式 $2ab=a^2+b^2-(a-b)^2$, 对任何 $t,v>0$ 我们有

$$S^2(t,v)=2\{t^{2\alpha}+v^{2\alpha}-(t^2+v^2)^\alpha\}>0. \tag{2.4.15}$$

对整数 k,j,l,r 和任何固定的 $\theta>1$, 令

$$\begin{aligned}
A_{kjlr}=&\{T:\theta^{k-1}\le A_T<\theta^k,\theta^{j-1}\le a_T<\theta^j,\theta^{l-1}\le B_T<\theta^l,\\
&\theta^{r-1}\le b_T<\theta^r\}.
\end{aligned}$$

我们总是考察那些使得 A_{kjlr} 非空的 k,j,l 和 r. 由条件 (iii), 对某 $0<c_3\le c_4<\infty$ 和 $c_5\le c_6<\infty$, 我们有

$$c_3\theta^r\le\theta^j\le c_4\theta^r \quad 等价地 \quad c_5\le j-r\le c_6. \tag{2.4.16}$$

通过考察函数 $f(x)=(x^{2\alpha}+1)/(x^2+1)^\alpha$ 并利用 (2.4.16), 对某 $0<c_7\le c_8<\infty$ 和 $0<c_9\le c_{10}<\infty$ 我们有

$$
\begin{aligned}
c_7\theta^{2\alpha(j+1)} &\le S^2(\theta^j, \theta^r) \le c_8\theta^{2\alpha(j+1)}, \\
c_9\theta^{2\alpha(r+1)} &\le S^2(\theta^j, \theta^r) \le c_{10}\theta^{2\alpha(r+1)}.
\end{aligned} \tag{2.4.17}
$$

进一步，对充分大的 $k \wedge l$ 有

$$
\begin{aligned}
&\inf_{T\in A_{kjlr}} \beta_T \\
&\ge \Big\{2\Big(\log\Big[\Big(\frac{\theta^{k-1}-\theta^j}{\theta^j}\vee 1\Big)\Big(\frac{\theta^{l-1}-\theta^r}{\theta^r}\vee 1\Big)\Big] \\
&\quad + \log\log\theta^{k-1} + \log\log\theta^{l-1}\Big)\Big\}^{1/2} \\
&\ge \theta^{-1}\Big\{2\Big(\log\Big[\Big(\frac{\theta^{k-1}-\theta^j}{\theta^j}\vee 1\Big)\Big(\frac{\theta^{l-1}-\theta^r}{\theta^r}\vee 1\Big)\Big] \\
&\quad + \log\log\theta^{k} + \log\log\theta^{l}\Big)\Big\}^{1/2} \\
&=: \theta^{-1}\beta_{kjlr}.
\end{aligned} \tag{2.4.18}
$$

由条件 (ii) 和 (iii), A_T 和 B_T 或者都有界或者都无界. 在有界的情形， a_T 和 b_T 都趋于零，从而 (注意到条件 (i)) 对某正整数 d_1 和 d_2 有

$$
j \le k+1 \le d_1, \qquad r \le l+1 \le d_2. \tag{2.4.19}
$$

在无界的情形， a_T 和 b_T 的下极限都大于零，从而 (也注意到条件 (i)) 对某正整数 d_3 和 d_4 有

$$
d_3 \le j \le k+1, \qquad d_4 \le r \le l+1. \tag{2.4.20}
$$

下面我们只考察无界的情形. 有界的情形可以同样考虑. 注意到 $S(t,v)$ 关于 t 和 v 单调增加，利用 (2.4.18), 可写

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{T\to\infty} D_1(A_T, B_T, a_T, b_T) \\
&\le \limsup_{\substack{k\to\infty \\ l\to\infty}} \sup_{\substack{d_3\le j\le k+1 \\ d_4\le r\le l+1 \\ c_5\le j-r\le c_6}} \sup_{T\in A_{kjlr}} \sup_{\substack{0\le s\le A_T-a_T \\ 0\le t\le a_T}} \sup_{\substack{0\le u\le B_T-b_T \\ 0\le v\le b_T}} \frac{|X(R(s,t,u,v))|}{S(a_T,b_T)\beta_T}
\end{aligned}
$$

$$\le \limsup_{\substack{k\to\infty \\ l\to\infty}} \sup_{\substack{d_3\le j\le k+1 \\ d_4\le r\le l+1 \\ c_5\le j-r\le c_6}} \sup_{\substack{0\le s\le\theta^k-\theta^{j-1} \\ 0\le t\le\theta^j}} \sup_{\substack{0\le u\le\theta^l-\theta^{r-1} \\ 0\le v\le\theta^r}} \frac{|X(R(s,t,u,v))|\theta^{1+\alpha}}{S(\theta^j,\theta^r)\beta_{kjlr}}. \tag{2.4.21}$$

令 $C_{kjlr} = \{(s,t,u,v) : 0 \le s \le \theta^k - \theta^{j-1}, 0 \le t \le \theta^j, 0 \le u \le \theta^l - \theta^{r-1}, 0 \le v \le \theta^r\}$ 为一个四维集合. 为了应用引理 2.4.1, 记

$$Y_{jr}(s,t,u,v) = \frac{X(R(s,t,u,v))}{S(\theta^j,\theta^r)}, \quad (t,s,u,v) \in C_{kjlr},$$

$$\varphi(z) = \frac{4(\sqrt{2}z)^\alpha}{S(\theta^j,\theta^r)}, \quad z > 0.$$

显然, $EY_{jr}(s,t,u,v) = 0$, $\Gamma^2 := \sup_{(s,t,u,v)\in C_{kjlr}} E\{Y_{jr}(s,t,u,v)\}^2 = 1$, 进而

$$\begin{aligned}
&E\{X(R(s_1,t_1,u_1,v_1)) - X(R(s_2,t_2,u_2,v_2))\}^2 \\
&\quad\le 2E\{([X(s_1+t_1,u_1+v_1) - X(s_2+t_2,u_2+v_2)] \\
&\qquad - [X(s_1,u_1+v_1) - X(s_2,u_2+v_2)])^2 \\
&\qquad + ([X(s_2+t_2,u_2) - X(s_1+t_1,u_1)] \\
&\qquad - [X(s_2,u_2) - X(s_1,u_1)])^2\} \\
&\quad\le 4E\{([X(s_1+t_1,u_1+v_1) - X(s_2+t_2,u_2+v_2)]^2 \\
&\qquad + [X(s_1,u_1+v_1) - X(s_2,u_2+v_2)])^2 \\
&\qquad + ([X(s_2+t_2,u_2) - X(s_1+t_1,u_1)]^2 \\
&\qquad + [X(s_2,u_2) - X(s_1,u_1)]^2\} \\
&\quad\le 16\{(s_1+t_1-s_2-t_2)^2 + (u_1+v_1-u_2-v_2)^2\}^\alpha \\
&\quad\le 16\cdot 2^\alpha\{\sqrt{(s_1-s_2)^2+(t_1-t_2)^2+(u_1-u_2)^2+(v_1-v_2)^2}\}^{2\alpha}.
\end{aligned}$$

从而我们得

$$\begin{aligned}
&E\{Y_{jr}(s_1,t_1,u_1,v_1) - Y_{jr}(s_2,t_2,u_2,v_2)\}^2 \\
&\quad\le \varphi\big(\sqrt{(s_1-s_2)^2+(t_1-t_2)^2+(u_1-u_2)^2+(v_1-v_2)^2}\big).
\end{aligned}$$

另一方面，由 (2.4.17), 对任意给定的 $\varepsilon' > 0$, 存在一个充分小的常数 $\delta = \delta(\varepsilon') > 0$ 使得

$$
\begin{aligned}
&(2\sqrt{2}+2)A\int_0^\infty \varphi(2\delta\theta^j 2^{-y^2})dy \\
&\quad = 8(\sqrt{2}+1)A\int_0^\infty (2\sqrt{2}\delta\theta^j 2^{-y^2})^\alpha \frac{1}{S(\theta^j,\theta^r)}dy \\
&\quad \le 4(\sqrt{2}+1)A\frac{(2\sqrt{2}\delta\theta^j)^\alpha}{\sqrt{c_7}\theta^{\alpha(j+1)}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha\log 2}} < \frac{\varepsilon'}{8},
\end{aligned}
$$

其中 A 为引理 2.4.1 中所定义. 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 取 $0 < \varepsilon' < 2\varepsilon$. 则由引理 2.4.1 得

$$
\begin{aligned}
&P\Bigg\{\sup_{\substack{0\le s\le\theta^k-\theta^{j-1}\\0\le t\le\theta^j}}\ \sup_{\substack{0\le u\le\theta^l-\theta^{r-1}\\0\le v\le\theta^r}} \frac{|X(R(s,t,u,v))|}{S(\theta^j,\theta^r)\beta_{kjlr}} \ge 1+\varepsilon\Bigg\} \\
&\le 2P\Bigg\{\sup_{\substack{0\le s\le\theta^k-\theta^{j-1}\\0\le t\le\theta^j}}\ \sup_{\substack{0\le u\le\theta^l-\theta^{r-1}\\0\le v\le\theta^r}} Y_{jr}(s,t,u,v) \\
&\qquad \ge \sqrt{1+\varepsilon}\beta_{kjlr}\Big(1+\frac{\varepsilon'}{8}\Big)\Bigg\} \\
&\le 2P\Bigg\{\sup_{\substack{0\le s\le\theta^k-\theta^{j-1}\\0\le t\le\theta^j}}\ \sup_{\substack{0\le u\le\theta^l-\theta^{r-1}\\0\le v\le\theta^r}} Y_{jr}(s,t,u,v) \\
&\qquad \ge \sqrt{1+\varepsilon}\beta_{kjlr}\Big[1+(2\sqrt{2}+2)A\int_0^\infty \varphi(2\delta\theta^j 2^{-y^2})dy\Big]\Bigg\} \\
&\le c\Big(\frac{\theta^k-\theta^{j-1}}{\delta\theta^j}\vee 1\Big)\frac{1}{\delta}\Big(\frac{\theta^l-\theta^{r-1}}{\delta\theta^j}\vee 1\Big)\Big(\frac{\theta^r}{\delta\theta^j}\vee 1\Big) \\
&\quad \cdot\exp\Big\{-\frac{1+\varepsilon}{2}\beta_{kjlr}^2\Big\} \\
&\le c\delta^{-4}\theta^{k-j+l-j+r-j}(\theta^{k-j+l-r}kl)^{-(1+\varepsilon)} \\
&\le c\delta^{-4}c_3^{-2}\theta^{-\varepsilon(k-j+l-r)}(kl)^{-(1+\varepsilon)}.
\end{aligned}
$$

由此得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{j=d_3}^{k+1}\sum_{r=d_4}^{l+1}P\Bigg\{\sup_{\substack{0\le s\le\theta^k-\theta^{j-1}\\0\le t\le\theta^j}}\ \sup_{\substack{0\le u\le\theta^l-\theta^{r-1}\\0\le v\le\theta^r}}|X(R(s,t,u,v))|/$$

$$(S(\theta^j,\theta^r)\beta_{kjlr})\ge 1+\varepsilon\Bigg\}<\infty.$$

从而，注意到 θ 的任意性，由 Borel-Cantelli 引理和 (2.4.21) 得 (2.4.2).

下证 (2.4.3). 我们也只考察 A_T 和 B_T 都无界的情形. 与 (2.4.21) 类似，写

$$\begin{aligned}
&\liminf_{T\to\infty}D_2(A_T,B_T,a_T,b_T)\\
&\ge\liminf_{\substack{k\to\infty\\l\to\infty}}\inf_{\substack{d_3\le j\le k+1\\d_4\le r\le l+1\\c_5\le j-r\le c_6}}\sup_{0\le s\le\theta^{k-1}-\theta^j}\ \sup_{0\le u\le\theta^{l-1}-\theta^r}\frac{|X(R(s,\theta^j,u,\theta^r))|}{S(\theta^j,\theta^r)\theta\beta_{kjlr}}\\
&\quad-\limsup_{\substack{k\to\infty\\l\to\infty}}\sup_{\substack{d_3\le j\le k+1\\d_4\le r\le l+1\\c_5\le j-r\le c_6}}\sup_{0\le s\le\theta^{k-1}-\theta^j}\ \sup_{0\le u\le\theta^{l-1}-\theta^r}|X(R(s,\theta^j,u,\\
&\quad\theta^r))|\theta^{1+\alpha}/(S(\theta^j,\theta^r)\beta_{kjlr})\\
&=:J_1-J_2.
\end{aligned}\tag{2.4.22}$$

模仿 (2.4.2) 的证明并比较 (2.4.21) 的右边和 J_2 中 t,v 的范围，我们得对任意的 $\varepsilon>0$, 当 θ 充分接近 1 时，

$$J_2\le\varepsilon\quad\text{a.s.}\tag{2.4.23}$$

考察 J_1. 对任意给定的充分大的 N, 由下式定义整数 f_{kj} 和 g_{lr}:

$$f_{kj}=\left[\frac{\theta^{k-1}-\theta^j}{N\theta^j}\vee 1\right]\quad 和\quad g_{lr}=\left[\frac{\theta^{l-1}-\theta^r}{N\theta^r}\vee 1\right].$$

对 $p=0,1,\cdots,f_{kj}$ 和 $q=0,1,\cdots,g_{lr}$, 定义随机变量

$$X_{jr}(R_{pq}):=X(R(Np\theta^j,\theta^j,Nq\theta^r,\theta^r)).$$

由 (iv) 得：对任意的 $0<\varepsilon'<\varepsilon<1$, 当 $k\wedge l$ 充分大时，

$$
\begin{aligned}
&P\Big\{\sup_{0\le s\le\theta^{k-1}-\theta^j}\ \sup_{0\le u\le\theta^{l-1}-\theta^r}\frac{|X(R(s,\theta^j,u,\theta^r))|}{S(\theta^j,\theta^r)\beta_{kjlr}}<\sqrt{1-\varepsilon}\Big\}\\
&\le P\Big\{\sup_{0\le s\le\theta^{k-1}-\theta^j}\ \sup_{0\le u\le\theta^{l-1}-\theta^r}\frac{|X(R(s,\theta^j,u,\theta^r))|}{S(\theta^j,\theta^r)}\\
&\qquad<\{2(1-\varepsilon')\log(f_{kj}g_{lr})\}^{1/2}\Big\}\\
&\le P\Big\{\max_{0\le p\le f_{kj}}\ \max_{0\le q\le g_{lr}}\frac{X_{jr}(R_{pq})}{S(\theta^j,\theta^r)}<\{2(1-\varepsilon')\log(f_{kj}g_{lr})\}^{1/2}\Big\}.
\end{aligned}
\tag{2.4.24}
$$

定义 $X_{jr}(R_{pq})$ 和 $X_{jr}(R_{p'q'})$ 的相关函数为:

$\lambda_{jr}(p,q,p',q')=\text{Correlation}(X_{jr}(R_{pq}),X_{jr}(R_{p',q'})),\quad p\ne p',q\ne q'.$

令 $h=p-p',m=q-q'$. 由关系式 $2ab=a^2+b^2-(a-b)^2$ 得

$$
\begin{aligned}
&|\text{Cov}(X_{jr}(R_{pq}),X_{jr}(R_{p',q'}))|\\
\le&|\{[(Nh\theta^j)^2+(Nm\theta^r+\theta^r)^2]^\alpha-[(Nh\theta^j)^2+(Nm\theta^r)^2]^\alpha\}\\
&-\{[(Nh\theta^j)^2+(Nm\theta^r)^2]^\alpha-[(Nh\theta^j)^2+(Nm\theta^r-\theta^r)^2]^\alpha\}|\\
&+\frac{1}{2}|\{[(Nh\theta^j-\theta^j)^2+(Nm\theta^r+\theta^r)^2]^\alpha-[(Nh\theta^j-\theta^j)^2\\
&+(Nm\theta^r)^2]^\alpha\}-\{[(Nh\theta^j-\theta^j)^2+(Nm\theta^r)^2]^\alpha-[(Nh\theta^j-\theta^j)^2\\
&+(Nm\theta^r-\theta^r)^2]^\alpha\}|+\frac{1}{2}|\{[(Nh\theta^j+\theta^j)^2+(Nm\theta^r+\theta^r)^2]^\alpha\\
&-[(Nh\theta^j+\theta^j)^2+(Nm\theta^r)^2]^\alpha\}-\{[(Nh\theta^j+\theta^j)^2+(Nm\theta^r)^2]^\alpha\\
&-[(Nh\theta^j+\theta^j)^2+(Nm\theta^r-\theta^r)^2]^\alpha\}|\\
=&\Big|\int_{\sqrt{(Nh\theta^j)^2+(Nm\theta^r)^2}}^{\sqrt{(Nh\theta^j)^2+(Nm\theta^r+\theta^r)^2}}d(x^{2\alpha})-\int_{\sqrt{(Nh\theta^j)^2+(Nm\theta^r-\theta^r)^2}}^{\sqrt{(Nh\theta^j)^2+(Nm\theta^r)^2}}d(x^{2\alpha})\Big|\\
&+\frac{1}{2}\Big|\int_{\sqrt{(Nh\theta^j-\theta^j)^2+(Nm\theta^r)^2}}^{\sqrt{(Nh\theta^j-\theta^j)^2+(Nm\theta^r+\theta^r)^2}}d(x^{2\alpha})\\
&-\int_{\sqrt{(Nh\theta^j-\theta^j)^2+(Nm\theta^r-\theta^r)^2}}^{\sqrt{(Nh\theta^j-\theta^j)^2+(Nm\theta^r)^2}}d(x^{2\alpha})\Big|
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{2}\Big|\int_{\sqrt{(Nh\theta^j+\theta^j)^2+(Nm\theta^r)^2}}^{\sqrt{(Nh\theta^j+\theta^j)^2+(Nm\theta^r+\theta^r)^2}} d(x^{2\alpha})$$

$$-\int_{\sqrt{(Nh\theta^j+\theta^j)^2+(Nm\theta^r-\theta^r)^2}}^{\sqrt{(Nh\theta^j+\theta^j)^2+(Nm\theta^r)^2}} d(x^{2\alpha})\Big|.$$

不失一般性，不妨设 $h,m>0$. 分别应用引理 2.4.2 于 $a=Nh\theta^j$, $Nh\theta^j-\theta^j$, $Nh\theta^j+\theta^j$ 和 $p=\theta^r$, 我们得

$$\begin{aligned}&|\mathrm{Cov}(X_{jr}(R_{pq}),X_{jr}(R_{p'q'}))|\\&\quad\le c\frac{\{(Nh+1)^2\theta^{2j}+(Nm+1)^2\theta^{2r}\}^{\alpha}\theta^{2r}}{(Nh-1)^2\theta^{2j}+(Nm-1)^2\theta^{2r}}.\end{aligned}$$

从而，由 (2.4.16) 和 (2.4.17) 对充分大的 $k\wedge l$ 和 N 我们有

$$\begin{aligned}|\lambda_{jr}(p,q,p',q')|&\le c\frac{\{(Nh+1)^2\theta^{2j}+(Nm+1)^2\theta^{2r}\}^{\alpha}\theta^{2r}}{\{(Nh-1)^2\theta^{2j}+(Nm-1)^2\theta^{2r}\}S^2(\theta^j,\theta^r)}\\&\le c\{(Nh\theta^j)^2+(Nm\theta^r)^2\}^{\alpha-1}\theta^{2r}/S^2(\theta^j,\theta^r)\\&\le cc_9^{-1}\theta^{-2\alpha}\{(c_3Nh)^2+(Nm)^2\}^{\alpha-1}\\&\le(h^2+m^2)^{\alpha-1}\le(2hm)^{\alpha-1}<(hm)^{-\nu},\end{aligned}$$

其中 $\nu=1-\alpha>0$. 为了估计 (2.4.24) 式右边的上界，我们应用引理 2.4.3 和 2.4.4 于

$$\begin{aligned}&\xi_{l_pl_q}=X_{jr}(R_{pq})/S(\theta^j,\theta^r),\quad p=0,1,\cdots,f_{kj};\ q=0,1,\cdots,g_{lr},\\&|\lambda_{pq}^{p'q'}|=|\lambda_{jr}(p,q,p',q')|<(|hm|)^{-\nu},\\&h=p-p'\neq0,m=q-q'\neq0,\\&u=u_{kjlr}=\{(2-\eta)\log(f_{kj}g_{lr})\}^{1/2},\quad\eta=2\varepsilon'<\frac{(1-\delta)\nu}{1+\nu+\delta},\\&f=f_{kj},\ g=g_{lr}.\end{aligned}$$

从而，对某个 $\delta_0>0$ 和充分大的 $k\wedge l$, (2.4.24) 的右边不超过

$$\{\Phi(u_{kjlr})\}^{(f_{kj}+1)(g_{lr}+1)}+c(f_{kj}g_{lr})^{-\delta_0}.$$

因而，由 (2.4.24) 得

$$P\Big\{\sup_{0\le s\le\theta^{k-1}-\theta^j}\ \sup_{0\le u\le\theta^{l-1}-\theta^r}\frac{X(R(s,\theta^j,u,\theta^r))}{S(\theta^j,\theta^r)\beta_{kjlr}}<\sqrt{1-\varepsilon}\Big\}$$
$$\le \exp\{-c_9\big((f_{kj}+1)(g_{lr}+1)\big)^{\varepsilon'}\}+c(f_{kj}g_{lr})^{-\delta_0}$$
$$\le c(f_{kj}g_{lr})^{-\delta_0}\le c\theta^{-\delta_0(k-j+l-r)}. \tag{2.4.25}$$

由条件 (iv) 知下述条件之一满足:

(a) 对任意给定的 $M>0$, 当 $k\wedge l$ 充分大时成立 $k-j\ge M\log k$ 和 $l-r\ge M\log l$,

(b) 对任意给定的 $M>0$, 当 $k\wedge l$ 充分大时成立 $k-j\ge M\log k$ 和 $k\ge Ml$,

(c) 对任意给定的 $M>0$, 当 $k\wedge l$ 充分大时成立 $l-r\ge M\log l$ 和 $l\ge Mk$.

若条件 (a) 满足，取 M 充分大，有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{j=d_3}^{[k-M\log k]}\sum_{r=d_4}^{[l-M\log l]}\theta^{-\delta_0(k-j+l-r)}$$
$$\le c\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\theta^{-\delta_0 M(\log k+\log l)}<\infty.$$

若条件 (b) 满足，取 M 充分大，有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{[k/M]}\sum_{j=d_3}^{[k-M\log k]}\sum_{r=d_4}^{l+1}\theta^{-\delta_0(k-j+l-r)}\le c\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{M}\theta^{-\delta_0 M\log k}<\infty.$$

当条件 (c) 满足时，我们有同样的收敛性. 从而，由 (2.4.25) 和 Borel-Cantelli 引理得

$$J_1\le\sqrt{1-\varepsilon}\quad \text{a.s.} \tag{2.4.26}$$

综合 (2.4.22), (2.4.23) 和 (2.4.26) 即得证 (2.4.3). 定理 2.4.1 证毕.

§2.5 两参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程

设 $X(\cdot)$ 是具有系数 $\gamma \geq 0$ 和 $\lambda > 0$ 的 O-U 过程. 在 2.1.5 小节, 我们已指出它是下述随机微分方程的平稳解:

$$d\,X(t) = -\lambda X(t) + (2\gamma)^{1/2} d\,W(t),$$

其中 $\{W(t); -\infty < t < \infty\}$ 是 Wiener 过程. 一般地, 具有边界条件

$$X(0) = X_0$$

的上述随机微分方程有唯一的解:

$$X(t) = e^{-\lambda t}\left\{X_0 + (2\gamma)^{1/2}\int_0^t e^{\lambda s} d\,W(s)\right\},$$

其中 X_0 是与 $W(\cdot)$ 独立的随机变量. 这是一个从 X_0 出发的具有系数 γ 和 λ 的 O-U 过程. 两参数 O-U 过程 (OUP_2) 是上述单参数过程的推广.

两参数 O-U 过程 (OUP_2) $\{X(t,v); t \geq 0, v \geq 0\}$ 定义为

$$X(t,v) = e^{-\alpha t - \beta v}\left\{X_0 + \sigma \int_0^t \int_0^v e^{\alpha x + \beta y}\, dW(x,y)\right\}, \quad t \geq 0, v \geq 0, \tag{2.5.1}$$

其中 $\alpha > 0$ 和 $\beta > 0$ 为两参系数, $W(\cdot,\cdot)$ 为一个两参数 Wiener 过程, X_0 为一个与 $W(\cdot,\cdot)$ 独立的随机变量. 这一定义是由王梓坤 (1983) 引入的. 若 X_0 是 Gauss 变量, 则 $X(\cdot,\cdot)$ 是一个 Gauss 过程. 若记

$$J(t,v) = e^{-\alpha t - \beta v}\int_0^t \int_0^v e^{\alpha x + \beta y}\, dW(x,y),$$

则易知

$$\begin{aligned} EJ(t_1,v_1)J(t_2,v_2) =& e^{-\alpha(t_1+t_2)-\beta(v_1+v_2)} \\ & \cdot \left(e^{2\alpha(t_1\wedge t_2)} - 1\right)\left(e^{2\beta(v_1\wedge v_2)} - 1\right)/(4\alpha\beta). \end{aligned}$$

可以证明 OUP_2 既不是独立增量过程，也不是平稳增量过程. 另一方面，对固定的 $c>0$, $\{X(t,c);t\geq 0\}$ 是一个从 $X(0,c)$ 出发的单参数 O-U 过程. 事实上,

$$X(t,c)=e^{-\alpha t}X(0,c)+\sigma J(t,c),$$

且 $EJ(t,c)=0$,

$$E[J(t_1,c)J(t_2,c)]=E[J(t_1)J(t_2)],$$

其中

$$J(t)=\sqrt{\frac{1-e^{-2\beta c}}{2\beta}}e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s}d\,W(s).$$

因此， $\{X(t,c);t\geq 0\}$ 与下述单参数 O-U 过程同分布:

$$\left\{\widetilde{X}(t):=e^{-\alpha t}X(0,c)+\sigma\sqrt{\frac{1-e^{-2\beta c}}{2\beta}}e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s}d\,W(s);\ \ t\geq 0\right\}.$$

同样，对固定的 $c>0$, $\{X(c,s);s\geq 0\}$ 是一个从 $X(c,0)$ 出发的单参数 O-U 过程.

王梓坤 (1983) 研究了 OUP_2 的一些 Markov 性质. 陈雄 (1989) 通过给出这一过程的像集和图集的 Hausdorff 维数研究了它的样本轨道性质. Lin (1995a, b) 通过建立它的连续模和大增量的极限定理给出了其样本轨道性质的直接描述.

为了简单起见,我们设 $\sigma=1$, $EX_0=0$, $EX_0^2=1$, $E\exp(tX_0^2)<\infty$ 对任何 $0<t<\frac{1}{2}$ 成立. 考察增量:

$$\begin{aligned}X(t+s,v)-X(t,v)&=e^{-\alpha(t+s)-\beta v}(1-e^{\alpha s})X_0\\&\quad+e^{-\alpha(t+s)-\beta v}(1-e^{\alpha s})\int_0^{t+s}\int_0^v e^{\alpha x+\beta y}\,dW(x,y)\\&\quad+e^{-\alpha t-\beta v}\int_t^{t+s}\int_0^v e^{\alpha x+\beta y}\,dW(x,y)\\&=:\xi_1(t,s,v)+\xi_2(t,s,v)+\xi_3(t,s,v)\end{aligned}\qquad(2.5.2)$$

和

$$
\begin{aligned}
X(R(t,s,v,u)) :=& X(t+s,v+u) - X(t+s,v) \\
& - X(t,v+u) + X(t,v) \\
=& e^{-\alpha(t+s)-\beta(v+u)}(1-e^{\alpha s})(1-e^{\beta u})X_0 \\
& + e^{-\alpha(t+s)-\beta(v+u)}(1-e^{\alpha s})\int_0^t\int_v^{v+u} e^{\alpha x+\beta y}\, dW(x,y) \\
& + e^{-\alpha(t+s)-\beta(v+u)}(1-e^{\alpha s})(1-e^{\beta u})\int_0^t\int_0^v e^{\alpha x+\beta y}\, dW(x,y) \\
& + e^{-\alpha(t+s)-\beta(v+u)}\int_t^{t+s}\int_v^{v+u} e^{\alpha x+\beta y}\, dW(x,y) \\
& + e^{-\alpha(t+s)-\beta(v+u)}(1-e^{\beta u})\int_t^{t+s}\int_0^v e^{\alpha x+\beta y}\, dW(x,y), \quad (2.5.3)
\end{aligned}
$$

其中 $R(t,s,v,u)=[t,t+s]\times[v,v+u]$. 从而我们有

$$
\begin{aligned}
& E\big(X(t+s,v)-X(t,v)\big)^2 \\
& \quad = e^{-2\alpha t-2\beta v}(1-e^{-\alpha s})^2 + \frac{1}{4\alpha\beta}(1-e^{-2\beta v}) \\
& \quad\quad \cdot \{(1-e^{-2\alpha t})(1-e^{-\alpha s})^2 + 1 - e^{-2\alpha s}\} \qquad (2.5.4)
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
EX^2(R(t,s,v,u)) =& e^{-2\alpha t-2\beta v}(1-e^{-\alpha s})^2(1-e^{-\beta u})^2 \\
& + \frac{1}{4\alpha\beta}(1-e^{-\alpha s})^2(1-e^{-2\alpha t})(1-e^{-2\beta u}) \\
& + \frac{1}{4\alpha\beta}(1-e^{-\alpha s})^2(1-e^{-\beta u})^2(1-e^{-2\alpha t})(1-e^{-2\beta v}) \\
& + \frac{1}{4\alpha\beta}(1-e^{-2\alpha s})(1-e^{-2\beta u}) \\
& + \frac{1}{4\alpha\beta}(1-e^{-\beta u})^2(1-e^{-2\alpha s})(1-e^{-2\beta v}). \qquad (2.5.5)
\end{aligned}
$$

易知

$$
\begin{aligned}
&E(X(t+s,v)-X(t,v))^2\\
&=\begin{cases}\alpha^2s^2e^{-2\alpha(t+s)-2\beta v}+\dfrac{s}{2\beta}(1-e^{-2\beta v})+O(s^2), & s\to 0,\\[2ex] e^{-2\alpha t-2\beta v}+\dfrac{1}{4\alpha\beta}(1-e^{-2\beta v})(2-e^{-2\alpha t})+O(e^{-\alpha s}), & s\to\infty\end{cases}\\
&:=\begin{cases}\sigma^2(t,s,v)+\sigma^2(s,v)+O(s^2), & s\to 0,\\ \overline{\sigma}_1^2(t,v)+O(e^{-\alpha s}), & s\to\infty,\end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.5.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&EX^2(R(t,s,v,u))\\
&=\begin{cases}\dfrac{1}{4\alpha\beta}(e^{2\alpha s}-1)(1-e^{-2\beta u})+o(su), & s\to 0,u\to 0,\\[2ex] \overline{\sigma}_2^2(t,v)+O(e^{-\alpha s}+e^{-\beta v}), & s\to\infty,u\to\infty,\end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.5.7}
$$

其中 $\overline{\sigma}_2^2(t,v)=e^{-2\alpha t-2\beta v}+\frac{1}{4\alpha\beta}(2-e^{-2\alpha t})(2-e^{-2\beta v})$.

另外, 由 (2.5.4), 对充分小的 s 有

$$
E(X(t+s,v)-X(t,v))^2\le\left(\alpha^2+\frac{\alpha}{4\beta}\right)s^2+\frac{1}{2\beta}s,
$$

由 $X(t,v)$ 关于 t 和 v 的对称性, 对充分小的 u 有

$$
E(X(t,v+u)-X(t,v))^2\le\left(\alpha^2+\frac{\alpha}{4\beta}\right)u^2+\frac{1}{2\beta}u.
$$

从而

$$
\begin{aligned}
&E(X(t+s,v+u)-X(t,v))^2\\
&\le 2E(X(t+s,v+u)-X(t+s,v))^2+2E(X(t+s,v)-X(t,v))^2\\
&\le 2\left\{\left(\alpha^2+\frac{\alpha}{4\beta}\right)(s^2+u^2)+\frac{1}{2\beta}(s+u)\right\}.
\end{aligned}
$$

由此和定理 2.1.3 知 $X(t,v)$ 关于 (t,v) 几乎处处连续.

2.5.1 OUP_2 的连续模

记 $\sigma_1(t,s,v)=\sigma(t,s,v)+\sigma(s,v)$, $\sigma_2(t,s,v)=\sigma(t,s,v)\wedge\sigma(s,v)$. 对任意固定的 $t\ge 0$ 和 $s>0$ 有

$$
\sigma(s,v)=o\big(\sigma(t,s,v)\big),\quad v\to 0.
$$

考察 $X(t,v)$ 对每个参数变量的连续模，我们有

定理 2.5.1 设 a_h 为 h 的函数，当 $h \to 0$ 时，$a_h = o(h^{-\delta})$ 对任何 $\delta > 0$ 成立且 $\liminf_{h\to 0} a_h > 0$. 则

$$\lim_{h\to 0}\sup_{v>0}\sup_{0\le t\le a_h}\sup_{0\le s\le h}\frac{|X(t+s,v)-X(t,v)|}{\sigma_1(t,h,v)\left\{2(\log\frac{1}{h}+\log\log\sigma_2^{-1}(t,h,v))\right\}^{1/2}} = 1 \text{ a.s.} \tag{2.5.8}$$

且对任何固定的 $v > 0$ 成立

$$\lim_{h\to 0}\sup_{0\le t\le a_h}\frac{|X(t+h,v)-X(t,v)|}{\sigma_1(t,h,v)\left\{2(\log\frac{1}{h}+\log\log\sigma_2^{-1}(t,h,v))\right\}^{1/2}} = 1 \text{ a.s.} \tag{2.5.9}$$

注 2.5.1 由 $X(t,v)$ 关于 t 和 v 的对称性，我们也有

$$\lim_{h\to 0}\sup_{t>0}\sup_{0\le v\le a_h}\sup_{0\le u\le h}\frac{|X(t,v+u)-X(t,v)|}{\nu(t,v,h)} = 1 \text{ a.s.}$$

$$\lim_{h\to 0}\sup_{0\le v\le a_h}\frac{|X(t,v+h)-X(t,v)|}{\nu(t,v,h)} = 1 \text{ a.s.}$$

其中 $\nu(t,v,h)$ 与 (2.5.8) 和 (2.5.9) 中的正则化因子类似.

考察 $X(t,v)$ 同时关于两参数变量的连续模，我们有下述定理.

定理 2.5.2 设 a_h 和 b_h 为 h 的函数，满足 $\liminf_{h\to 0} a_h b_h > 0$，且 c_h 为 h 的连续非增函数，当 $h \to 0$ 时，$c_h \to 0$，$a_h b_h = o\big((hc_h)^{-\delta}\big)$ 对任何 $\delta > 0$ 成立. 则

$$\lim_{h\to 0}\sup_{0\le t\le a_h}\sup_{0<s\le h}\sup_{0\le v\le b_h}\sup_{0<u\le c_h}\frac{|X(R(t,s,v,u))|}{\big(2hc_h\log(hc_h)^{-1}\big)^{\frac{1}{2}}} = 1 \text{ a.s.} \tag{2.5.10}$$

$$\lim_{h\to 0}\sup_{0\le t\le a_h}\sup_{0\le v\le b_h}\frac{|X(R(t,h,v,c_h))|}{\big(2hc_h\log(hc_h)^{-1}\big)^{\frac{1}{2}}} = 1 \text{ a.s.} \tag{2.5.11}$$

为了证明定理 2.5.1 和 2.5.2, 我们需要一些指数不等式.

引理 2.5.1 对任意的 $0 < \varepsilon < 1/2$, 存在 $h = h(\varepsilon) > 0$ 和 $C = C(\varepsilon) > 0$ 使得对任何固定的 $t \geq 0$ 和 $0 < s \leq h$ 有

$$P\left\{\sup_{v>0} \frac{|X(t+s,v) - X(t,v)|}{\sigma_1(t,s,v)\left\{x^2 + 2\log\log\sigma_2^{-1}(t,s,v)\right\}^{1/2}} \geq 1 + 2\varepsilon\right\}$$

$$\leq C\exp\left\{-\frac{1+\varepsilon}{2}x^2\right\}. \tag{2.5.12}$$

证明 令 $0 < \theta < 1$, $\delta > 0$ 待定. 由以下两式分别定义 v_k 和 v_k':

$$\sigma^2(s, v_k) = \theta^k, \quad k = k_0, k_0 + 1, \cdots,$$

其中 $k_0 = [\log(\delta s/2\beta)/\log\theta]$, 和

$$\sigma^2(t, s, v_k') = \theta^k, \quad k = k_1, k_1 + 1, \cdots,$$

其中 $k_1 = [\log\sigma^2(t, s, v_{k_0})/\log\theta]$. 由定义易知

$$v_k \to 0 \ \text{且} v_k' \to \infty \quad (k \to \infty), \tag{2.5.13}$$

$$v_{k_1}' \leq v_{k_0}, \tag{2.5.14}$$

$$1 - e^{-2\beta v_{k_0+1}} \leq \delta \leq 1 - e^{-2\beta v_{k_0}} \tag{2.5.15}$$

$$\theta(1 - e^{-2\beta v_k}) = 1 - e^{-2\beta v_{k+1}}. \tag{2.5.16}$$

由 (2.5.15) 和 (2.5.16), 对任何 $k \geq k_0$ 有

$$\begin{aligned} e^{-2\beta(v_k - v_{k+1})} &= 1 - (1-\theta)(1 - e^{-2\beta v_k})e^{2\beta v_{k+1}} \\ &\geq 1 - \frac{1-\theta}{1-\delta} = \frac{\theta - \delta}{1-\delta}. \end{aligned} \tag{2.5.17}$$

此外, 显然有

$$e^{-2\beta(v_{k+1}' - v_k')} = \theta. \tag{2.5.17'}$$

由于

$$1 - e^{-2\beta v_{k+1}'} \geq 1 - e^{-2\beta v_{k_1+1}'} \geq 1 - e^{-2\beta v_{k_0}} \geq \delta,$$

只要 θ 充分接近于 1, 对 $k \geq k_1$ 我们有

$$1-e^{-2\beta v'_k}=1-\frac{1}{\theta}e^{-2\beta v'_{k+1}}$$
$$=\frac{1}{\theta}(1-e^{-2\beta v'_{k+1}})-\left(\frac{1}{\theta}-1\right)\geq\frac{1}{\sqrt{\theta}}(1-e^{-2\beta v'_{k+1}}).\qquad(2.5.16')$$

由 (2.5.2) 得

$$P\left\{\sup_{v>0}\frac{|X(t+s,v)-X(t,v)|}{\sigma_1(t,s,v)\left\{x^2+2\log\log\sigma_2^{-1}(t,s,v)\right\}^{1/2}}\geq 1+2\varepsilon\right\}$$
$$\leq\sum_{k=k_0}^{\infty}P\left\{\sup_{v_{k+1}<v\leq v_k}\frac{|\xi_1(t,s,v)|}{\sigma(t,s,v)}\geq(1+2\varepsilon)\left(x^2+2\log\log\theta^{-k}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$
$$+\sum_{k=k_1}^{\infty}P\left\{\sup_{v'_k\leq v<v'_{k+1}}\frac{|\xi_1(t,s,v)|}{\sigma(t,s,v)}\geq(1+2\varepsilon)\left(x^2+2\log\log\theta^{-k}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$
$$+\sum_{k=k_0}^{\infty}P\left\{\sup_{v_{k+1}<v\leq v_k}\frac{|\xi_2(t,s,v)|}{\sigma(s,v)}\geq\frac{\varepsilon}{2}\left(x^2+2\log\log\theta^{-k}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$
$$+\sum_{k=k_1}^{\infty}P\left\{\sup_{v'_k\leq v<v'_{k+1}}\frac{|\xi_2(t,s,v)|}{\sigma(s,v)}\geq\frac{\varepsilon}{2}\left(x^2+2\log\log\theta^{-k}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$
$$+\sum_{k=k_0}^{\infty}P\left\{\sup_{v_{k+1}<v\leq v_k}\frac{|\xi_3(t,s,v)|}{\sigma(s,v)}\geq\left(1+\frac{3\varepsilon}{2}\right)\left(x^2+2\log\log\theta^{-k}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$
$$+\sum_{k=k_1}^{\infty}P\left\{\sup_{v'_k\leq v<v'_{k+1}}\frac{|\xi_3(t,s,v)|}{\sigma(s,v)}\geq\left(1+\frac{3\varepsilon}{2}\right)\left(x^2+2\log\log\theta^{-k}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$
$$:=\sum_{j=1}^{6}p_j.\qquad(2.5.18)$$

首先估计 p_1. 由关于 X_0 的假设，对充分小的 s 我们有

$$p_1=\sum_{k=k_0}^{\infty}P\left\{(e^{\alpha s}-1)|X_0|\geq(1+2\varepsilon)\alpha s(x^2+2\log\log\theta^{-k})^{\frac{1}{2}}\right\}$$
$$\leq\sum_{k=k_0}^{\infty}P\left\{|X_0|\geq(1+\varepsilon)(x^2+2\log\log\theta^{-k})^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$\leq \sum_{k=k_0}^{\infty} E\exp\left(\frac{1-\varepsilon/2}{2}X_0^2\right)\exp\left\{-\frac{1}{2}(1+\varepsilon)(x^2+2\log\log\theta^{-k})^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$\leq c\exp\left\{-\frac{1}{2}(1+\varepsilon)x^2\right\}\sum_{k=k_0}^{\infty}k^{-(1+\varepsilon)}\leq c\exp\left\{-\frac{1}{2}(1+\varepsilon)x^2\right\}. \tag{2.5.19}$$

对 p_2 我们有同样的估计.

现考察 p_3. 令

$$Y(v)=\int_0^{t+s}\int_0^v e^{\alpha s+\beta y}\,dW(x,y),$$

这是一个具有独立增量的 Gauss 过程且

$$EY^2(v)=\frac{1}{4\alpha\beta}\left(e^{2\alpha(t+s)}-1\right)\left(e^{2\beta v}-1\right).$$

注意到 (2.5.16) 和 (2.5.17), 对充分小的 s 我们有

$$p_3\leq\sum_{k=k_0}^{\infty}P\Big\{\sup_{v_{k+1}<v\leq v_k}|Y(v)|\geq\frac{\varepsilon}{2}e^{\alpha(t+s)+\beta v_{k+1}}(e^{\alpha s}-1)^{-1}$$

$$\cdot\,\sigma(s,v_{k+1})\left(x^2+2\log\log\theta^{-k}\right)^{\frac{1}{2}}\Big\}$$

$$\leq 2\sum_{k=k_0}^{\infty}P\Big\{|Y(v_k)|/\left(EY^2(v_k)\right)^{\frac{1}{2}}\geq\frac{\varepsilon}{2}\left(EY^2(v_k)\right)^{-\frac{1}{2}}e^{\alpha(t+s)+\beta v_{k+1}}$$

$$\cdot\,(e^{\alpha s}-1)^{-1}\sigma(s,v_{k+1})\left(x^2+2\log\log\theta^{-k}\right)^{\frac{1}{2}}\Big\}$$

$$\leq c\sum_{k=k_0}^{\infty}\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2\theta}{8\alpha s}e^{-2\beta(v_k-v_{k+1})}\left(x^2+2\log\log\theta^{-k}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$\leq c\sum_{k=k_0}^{\infty}\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2\theta(\theta-\delta)}{8\alpha s(1-\delta)}\left(x^2+2\log\log\theta^{-k}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\leq c\exp(-x^2). \tag{2.5.20}$$

用 (2.5.16′) 和 (2.5.17′) 代替 (2.5.16) 和 (2.5.17), 对 p_4 我们有同样的估计.

现在来估计 p_5. 令

$$Z(v)=\int_t^{t+s}\int_0^v e^{\alpha x+\beta y}\,dW(x,y),$$

这也是一个具有独立增量的 Gauss 过程且

$$EZ^2(v)=\frac{1}{4\alpha\beta}e^{2\alpha t}(e^{2\alpha s}-1)(e^{2\beta v}-1).$$

与 (2.5.20) 类似, 对充分接近于 1 的 θ 和充分小的 δ 有

$$\begin{aligned}
p_5\le&\sum_{k=k_0}^{\infty}P\Big\{\sup_{v_{k+1}<v\le v_k}|Z(v)|\ge\Big(1+\frac{3\varepsilon}{2}\Big)e^{\alpha t+\beta v_{k+1}}\\
&\cdot\sigma(s,v_{k+1})\big(x^2+2\log\log\theta^{-k}\big)^{\frac12}\Big\}\\
\le& c\sum_{k=k_0}^{\infty}\exp\Big\{-\frac12\Big(1+\frac{3\varepsilon}{2}\Big)\theta e^{-2\beta(v_k-v_{k+1})}\big(x^2+2\log\log\theta^{-k}\big)^{\frac12}\Big\}\\
\le& c\sum_{k=k_0}^{\infty}\exp\Big\{-\frac{\theta}{2}\Big(1+\frac{3\varepsilon}{2}\Big)\frac{\theta-\delta}{1-\delta}(x^2+2\log\log\theta^{-k})^{\frac12}\Big\}\\
\le& c\exp\Big\{-\frac{1+\varepsilon}{2}x^2\Big\}. \qquad (2.5.21)
\end{aligned}$$

对 p_6 我们有同样的估计.

把这些不等式代入 (2.5.18) 即得证 (2.5.12), 引理 2.5.1 得证.

引理 2.5.2 *设 $a>0$, $0<\varepsilon<1/2$. 则存在 $h=h(\varepsilon)>0$ 和 $C_1=C_1(\varepsilon)>0$ 使得*

$$\begin{aligned}
P\Big\{&\sup_{v>0}\sup_{0\le t\le a}\sup_{0<s\le h}\frac{|X(t+s,v)-X(t,v)|}{\sigma_1(t,h,v)\big\{x^2+2\log\log\sigma_2^{-1}(t,h,v)\big\}^{1/2}}\ge 1+4\varepsilon\Big\}\\
&\le\frac{C_1a}{h}\exp\Big\{-\frac{1+\varepsilon}{2}x^2\Big\}. \qquad (2.5.22)
\end{aligned}$$

证明 不妨设 $x^2\ge 2$. 令 k 为一待定正整数, 对任意的 $t\ge 0$, 令

$$t_j=[t2^j/h]h/2^j,\quad j=k,k+1,\cdots.$$

由于 $X(t,v)$ 关于 (t,v) 几乎处处连续, 我们可写

$$
\begin{aligned}
&|X(t+s,v)-X(t,v)| \\
\le &\left|X\big((t+s)_k,v\big)-X(t_k,v)\right| + \sum_{j=0}^{\infty}\left|X\big((t+s)_{k+j+1},v\big)\right. \\
&\left. - X\big((t+s)_{k+j},v\big)\right| + \sum_{j=0}^{\infty}\left|X(t_{k+j+1},v)\right. \\
&\left. - X(t_{k+j},v)\right|. \qquad (2.5.23)
\end{aligned}
$$

由定义，对充分小的 h 和充分大的 k 及 $0<s\le h$ 有

$$
\begin{aligned}
\sigma^2\big(t_k,(t+s)_k-t_k,v\big) &\le \alpha^2(1+2^{-k})^2h^2e^{-2\alpha(t-2^{-k}h)-2\beta v} \\
&\le (1+\varepsilon/2)\sigma^2(t,h,v), \\
\sigma^2\big((t+s)_k-t_k,v\big) &\le (1-2^{-k})\frac{h}{2\beta}(1-e^{-2\beta v}) \\
&\le (1+\varepsilon/2)\sigma^2(h,v),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^2\big((t+s)_{k+j},h/2^{k+j+1},v\big) &\le \alpha^2 2^{-2(k+j+1)}h^2e^{-2\alpha t-2\beta v} \\
&\le 2^{-(k+j+1)}\sigma^2(t,h,v),
\end{aligned}
$$

$$
\sigma^2(h/2^{k+j+1},v)\le 2^{-(k+j+1)}\frac{h}{2\beta}(1-e^{-2\beta v})\le 2^{-(k+j+1)}\sigma^2(h,v).
$$

由这些不等式和引理 2.5.1 对充分大的 k 我们有

$$
\begin{aligned}
&P\left\{\sup_{v>0}\sup_{0\le t\le a}\sup_{0<s\le h}\frac{\left|X\big((t+s)_k,v\big)-X(t_k,v)\right|}{\sigma_1(t,h,v)\left\{x^2+2\log\log\sigma_2^{-1}(t,h,v)\right\}^{1/2}}\ge 1+3\varepsilon\right\} \\
&\quad\le c2^{2k}\frac{a}{h}\exp\left\{-\frac{1+\varepsilon}{2}x^2\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&P\left\{\sup_{v>0}\sup_{0\le t\le a}\sup_{0<s\le h}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left|X\big((t+s)_{k+j+1},v\big)-X\big((t+s)_{k+j},v\big)\right|}{ma_1(t,h,v)\left\{x^2+2\log\log\sigma_2^{-1}(t,h,v)\right\}^{1/2}}\ge\frac{\varepsilon}{2}\right\} \\
&\quad\le c\sum_{j=0}^{\infty}2^{2(k+j+1)}\frac{a}{h}\exp\left\{-\frac{(1+\varepsilon)\varepsilon^2}{8(1+2\varepsilon)^2}2^{k+j+1}x^2\right\} \\
&\quad\le c\frac{a}{h}e^{-x^2}\sum_{j=0}^{\infty}2^{2(k+j+1)}\exp(-\varepsilon^2 2^{k+j+4})\le c\frac{a}{h}e^{-x^2},
\end{aligned}
$$

其中用到了初等不等式 $bd \geq b + d$ ($\forall b \geq 2,\ d \geq 2$). 对 (2.5.23) 中的第二个级数我们有同样的估计. 综合这些不等式和 (2.5.23) 即得证 (2.5.22).

引理 2.5.3 设 $a>0, b>0, 0<\varepsilon<1/2$. 则存在 $h=h(\varepsilon)>0$, $d=d(silon)>0$, $C_2=C_2(\varepsilon)>0$ 使得

$$
\begin{aligned}
&P\left\{\sup_{0\leq t\leq a}\sup_{0<s\leq h}\sup_{0\leq v\leq b}\sup_{0<u\leq d}\frac{|X(R(t,s,v,u))|}{(su)^{1/2}}\geq(1+2\varepsilon)x\right\}\\
&\quad\leq C_2\frac{ab}{hd}\exp\left\{-\frac{1+\varepsilon}{2}x^2\right\}
\end{aligned}
\tag{2.5.24}
$$

对任何 $x>0$ 成立.

证明 不妨设 $x\geq\sqrt{2}$. 令 k 为待定正整数, 对任意的 $t\geq 0$, $v\geq 0$ 令

$$t_j=[t2^j/h]h/2^j,\quad v'_j=[v2^j/d]d/2^j,\quad j=k,k+1,\cdots.$$

与 (2.5.23) 类似我们有

$$
\begin{aligned}
|X(R(t,s,v,u))|\leq&|X\big(R(t_k,(t+s)_k-t_k,v'_k,(v+u)'_k-v'_k)\big)|\\
&+|X\big(R((t+s)_k,(t+s)-(t+s)_k,v'_k,(v+u)'_k-v'_k)\big)|\\
&+|X\big(R(t_k,t-t_k,v'_k,(v+u)'_k-v'_k)\big)|\\
&+|X\big(R(t,s,v'_k,v-v'_k)\big)|\\
&+|X\big(R(t,s,(v+u)'_k,(v+u)-(v+u)'_k)\big)|\\
\leq&|X\big(R(t_k,(t+s)_k-t_k,v'_k,(v+u)'_k-v'_k)\big)|\\
&+\sum_{j=0}^{\infty}|X\big(R((t+s)_{k+j},(t+s)_{k+j+1}\\
&\qquad-(t+s)_{k+j},v'_k,(v+u)'_k-v'_k)\big)|\\
&+\sum_{j=0}^{\infty}|X\big(R(t_{k+j},t_{k+j+1}-t_{k+j},v'_k,(v+u)'_k-v'_k)\big)|\\
&+|X\big(R(t,s,v'_k,v-v'_k)\big)|\\
&+|X\big(R(t,s,(v+u)'_k,(v+u)-(v+u)'_k)\big)|.
\end{aligned}
\tag{2.5.25}
$$

进一步，注意到 (2.5.7), 当 $s\to 0$ 和 $u\to 0$ 时有

$$EX^2\left(R\big(t_k,(t+s)_k-t_k,v_k',(v+u)_k'-v_k'\big)\right)\le(1+2^{-k})^2su+o(su),$$

$$EX^2\left(R\big((t+s)_{k+j},(t+s)_{k+j+1}-(t+s)_{k+j},v_k',(v+u)_k'-v_k'\big)\right)$$
$$=2^{-2(k+j+1)}su+o\big(2^{-2(k+j+1)}su\big),$$

$$EX^2(R(t,s,v_k',v-v_k'))=2^{-k}su+o(su).$$

从而，对充分大的 k, 充分小的 s 和 u 有

$$P\Big\{\sup_{0\le t\le a}\sup_{0<s\le h}\sup_{0\le v\le b}\sup_{0<u\le d}\Big|X\left(R\big(t_k,(t+s)_k-t_k,v_k',(v+u)_k'-v_k'\big)\right)\Big|\Big/(su)^{1/2}\ge(1+\varepsilon)x\Big\}$$
$$\le 2^{4k}\frac{ab}{hd}\exp\left\{-\frac{1+\varepsilon}{2}x^2\right\},$$

$$P\left\{\sup_{0\le t\le a}\sup_{0<s\le h}\sup_{0\le v\le b}\sup_{0<u\le d}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left|X\left(R\big((t+s)_{k+j},(t+s)_{k+j+1}-(t+s)_{k+j},v_k',(v+u)_k'-v_k'\big)\right)\right|}{\sum_{j=0}^{\infty}(2^{-(j+1)}su)^{1/2}}\ge\frac{\sqrt{2}-1}{4}\varepsilon x\right\}$$
$$\le\sum_{j=0}^{\infty}2^{4(k+j+1)}\frac{ab}{hd}\sup_{0\le t\le a}\sup_{0<s\le h}\sup_{0\le v\le b}\sup_{0<u\le d}$$
$$P\left\{\left|X\Big(R\big((t+s)_{k+j},(t+s)_{k+j+1}-(t+s)_{k+j},v_k',(v+u)_k'-v_k'\big)\Big)\right|\ge\frac{\sqrt{2}-1}{4}\varepsilon x2^{k+(j+1)/2}(2^{-2(k+j+1)}su)^{\frac{1}{2}}\right\}$$
$$\le\frac{ab}{hd}\sum_{j=0}^{\infty}2^{4(k+j+1)}\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{200}2^{2k+j+1}x^2\right\}\le c\frac{ab}{hd}e^{-x^2}.$$

对 (2.5.25) 右边的第二项我们有同样的估计. 对 $X\big(R(t,s,v_k',v-v_k')\big)$, 我们有

$$P\left\{\sup_{0\le t\le a}\sup_{0<s\le h}\sup_{0\le v\le b}\sup_{0<u\le d}\frac{\left|X\left(R(t,s,v_k',v-v_k')\right)\right|}{(su)^{1/2}}\ge\frac{\varepsilon}{4}x\right\}$$
$$\le 2^{4k}\frac{ab}{hd}\exp\left\{-\frac{\varepsilon}{40}2^kx^2\right\}\le c\frac{ab}{hd}e^{-x^2}.$$

对 (2.5.25) 右边的最后一项我们也有同样的估计. 综合这些不等式和 (2.5.25) 即得 (2.5.24).

定理 2.5.1 的证明 首先, 我们证明

$$\limsup_{h\to 0}\sup_{v>0}\sup_{0\le t\le a_h}\sup_{0<s\le h}|X(t+s,v)-X(t,v)|/$$
$$\cdot\sigma_1(t,h,v)\left\{2(\log h^{-1}+\log\log\sigma_2^{-1}(t,h,v))\right\}^{1/2}\le 1\quad\text{a.s.}\tag{2.5.26}$$

不妨设 a_h 关于 $0\le h\le 1$ 单调增加, 否则可用 $a_h^*=\sup_{h\le s\le 1}a_s$ 代替 a_h.

设 $0<\varepsilon<1/2$, $\theta=1-\varepsilon$. 令 $h_j=\theta^j$. 对充分大的 j, 由引理 2.5.2 得

$$P\left\{\sup_{v>0}\sup_{0\le t\le a_{h_{j+1}}}\sup_{0<s\le h_j}|X(t+s,v)-X(t,v)|/\right.$$
$$\left.\cdot\,\sigma_1(t,h_j,v)\left\{2(\log h_j^{-1}+\log\log\sigma_2^{-1}(t,h_j,v))\right\}^{1/2}\ge 1+\varepsilon\right\}$$
$$\le C_1\frac{a_{h_j+1}}{h_j}\exp\left\{-\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)\log h_j^{-1}\right\}$$
$$\le C_1\frac{(h_{j+1})^{-\varepsilon/8}}{h_j}h_j^{1+\varepsilon/4}\le C_1\theta^{(j-1)\varepsilon/8}.$$

由此和 Borel-Cantelli 引理得

$$\limsup_{j\to\infty}\sup_{v>0}\sup_{0\le t\le a_{h_{j+1}}}\sup_{0<s\le h_j}|X(t+s,v)-X(t,v)|/$$
$$\cdot\,\sigma_1(t,h_j,v)\left\{2(\log h_j^{-1}+\log\log\sigma_2^{-1}(t,h_j,v))\right\}^{1/2}$$
$$\le 1+\varepsilon\quad\text{a.s.}$$

进而

$$\begin{aligned}&\limsup_{h\to 0}\sup_{v>0}\sup_{0\le t\le a_h}\sup_{0<s\le h}|X(t+s,v)-X(t,v)|/\\&\quad\cdot\sigma_1(t,h,v)\big\{2(\log h^{-1}+\log\log\sigma_2^{-1}(t,h,v))\big\}^{1/2}\\&\le\limsup_{j\to\infty}\sup_{v>0}\sup_{0\le t\le a_{h_{j+1}}}\sup_{0<s\le h_j}|X(t+s,v)-X(t,v)|/\\&\quad\cdot\theta\sigma_1(t,h_j,v)\big\{2(\log h_j{}^{-1}+\log\log\sigma_2^{-1}(t,h_j,v))\big\}^{1/2}\\&\le(1-\varepsilon)^{-1}(1+\varepsilon)\quad\text{a.s.}\end{aligned}$$

由 ε 的任意性, (2.5.26) 得证.

下面证明对固定的 $v>0$ 我们有

$$\begin{aligned}&\liminf_{h\to 0}\sup_{0\le t\le a_h}\frac{|X(t+h,v)-X(t,v)|}{\sigma_1(t,h,v)\big\{2(\log h^{-1}+\log\log\sigma_2^{-1}(t,h,v))\big\}^{1/2}}\\&\ge 1\quad\text{a.s.}\end{aligned}\tag{2.5.27}$$

注意到对固定的 $v>0$ 和 $t\ge 0$ 有

$$\sigma(t,h,v)=o\big(\sigma(h,v)\big),\quad h\to 0,$$

并回顾引理 2.5.1 的证明, 我们看到 (2.5.27) 等价于

$$\liminf_{h\to 0}\sup_{0\le t\le a_h}\frac{|\xi_3(t,h,v)|}{\sigma(h,v)(2\log h^{-1})^{1/2}}\ge 1\quad\text{a.s.}\tag{2.5.28}$$

记 $t_i=ih, i=0,1,\cdots,i_h:=[a_h/h]$. 因为 $\xi_3(t_i,h,v), i=0,1,\cdots,i_h$, 相互独立, 对任意的 $\varepsilon>0$ 有

$$\begin{aligned}&P\left\{\max_{0\le i\le i_h}\frac{|\xi_3(t_i,h,v)|}{\sigma(h,v)(2\log h^{-1})^{1/2}}\le 1-\varepsilon\right\}\\&=\prod_{i=0}^{i_h}\left\{1-P\Big\{\frac{|\xi_3(t_i,h,v)|}{\sigma(h,v)(2\log h^{-1})^{1/2}}>1-\varepsilon\Big\}\right\}\\&\le\prod_{i=0}^{i_h}\{1-\exp\{-(1-\varepsilon)\log h^{-1}\}\}\\&\le\exp\big(-i_h h^{1-\varepsilon}\big)\le\exp\big(-h^{-\varepsilon/2}\big).\end{aligned}\tag{2.5.29}$$

取 $h_k=k^{-1}$. 由 (2.5.29) 得

$$\begin{aligned}&\liminf_{h\to 0}\sup_{0\le t\le a_h}\frac{|\xi_3(t,h,v)|}{\sigma(h,v)(2\log h^{-1})^{1/2}}\\&\qquad\ge\liminf_{k\to\infty}\sup_{0\le i\le i_{h_k}}\frac{|\xi_3(t_i,h_k,v)|}{\sigma(h_k,v)(2\log h_k^{-1})^{1/2}}\ge 1-\varepsilon\quad\text{a.s.}\end{aligned}$$

从而 (2.5.27) 得证. 综合 (2.5.26) 和 (2.5.27) 即得定理 2.5.1 的结论.

定理 2.5.2 的证明 首先，我们证明

$$\limsup_{h\to 0}\sup_{0\le t\le a_h}\sup_{0<s\le h}\sup_{0\le v\le b_h}\sup_{0<u\le c_h}\frac{|X(R(t,s,v,u))|}{(2hc_h\log(hc_h)^{-1})^{\frac{1}{2}}}\le 1\ \text{a.s.}\tag{2.5.30}$$

不妨设 a_h 和 b_h 非增，否则可考察 $a_h^*=\sup_{h\le s\le 1}a_s$ 和 $b_h^*=\sup_{h\le s\le 1}b_s$. 设 $0<\varepsilon<1/2$, $\theta=1-\varepsilon$. 定义 h_j 使得 $h_jc_{h_j}=\theta^j$, $j=0,1,\cdots$. 由引理 2.5.3 得

$$\begin{aligned}&P\Big\{\sup_{0\le t\le a_{h_{j+1}}}\sup_{0<s\le h_j}\sup_{0\le v\le b_{h_{j+1}}}\sup_{0<u\le c_{h_j}}|X(R(t,s,v,u))|/\\&\quad\cdot(2h_jc_{h_j}\log(h_jc_{h_j})^{-1})^{\frac{1}{2}}\ge 1+2\varepsilon\Big\}\\&\quad\le C_2\frac{a_{h_{j+1}}b_{h_{j+1}}}{h_jc_{h_j}}\exp\{-(1+\varepsilon)\log(h_jc_{h_j})^{-1}\}\\&\quad\le C_2\frac{(h_{j+1}c_{h_{j+1}})^{-\varepsilon/2}}{h_jc_{h_j}}(h_jc_{h_j})^{1+\varepsilon}=C_2\theta^{(j-1)\varepsilon/2}.\end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned}&\limsup_{j\to\infty}\sup_{0\le t\le a_{h_{j+1}}}\sup_{0<s\le h_j}\sup_{0\le v\le b_{h_{j+1}}}\sup_{0<u\le c_{h_j}}\frac{|X(R(t,s,v,u))|}{(2h_jc_{h_j}\log(h_jc_{h_j})^{-1})^{\frac{1}{2}}}\\&\quad\le 1+2\varepsilon\quad\text{a.s.}\end{aligned}$$

进而

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{h\to 0}\sup_{0\le t\le a_h}\sup_{0<s\le h}\sup_{0\le v\le b_h}\sup_{0<u\le c_h}\frac{|X(R(t,s,v,u))|}{\left(2hc_h\log(hc_h)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}}\\
\le&\limsup_{j\to\infty}\sup_{0\le t\le a_{h_{j+1}}}\sup_{0<s\le h_j}\sup_{0\le v\le b_{h_{j+1}}}\sup_{0<u\le c_{h_j}}\frac{|X(R(t,s,v,u))|}{\left(\theta 2h_jc_{h_j}\log(h_jc_{h_j})^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}}\\
\le&(1-\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}(1+2\varepsilon)\quad \text{a.s.}
\end{aligned}
$$

由 ε 的任意性即得 (2.5.30).

下面证明

$$
\liminf_{h\to 0}\sup_{0\le t\le a_h}\sup_{0\le v\le b_h}\frac{|X(R(t,h,v,c_h))|}{\left(2hc_h\log(hc_h)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}}\ge 1\quad \text{a.s.}\qquad (2.5.31)
$$

记 $t_i=ih, i=0,1,\cdots,i_h:=[a_h/h], v_j=jc_h, j=0,1,\cdots,j_h:=[b_h/c_h]$. 则对任意给定的 $\varepsilon>0$

$$
\begin{aligned}
&P\left\{\max_{0\le i\le i_h}\max_{0\le j\le j_h}\frac{|X(R(t_i,h,v_j,c_h))|}{\left(2hc_h\log(hc_h)^{-1}\right)^{1/2}}\le 1-\varepsilon\right\}\\
\le&\prod_{i=0}^{i_h}\prod_{j=0}^{j_h}\left\{1-P\left\{\frac{|X(R(t_i,h,v_j,c_h))|}{\left(2hc_h\log(hc_h)^{-1}\right)^{1/2}}>1-\varepsilon\right\}\right\}\\
\le&\prod_{i=0}^{i_h}\prod_{j=0}^{j_h}\left\{1-\exp\left(-(1-\varepsilon)\log(hc_h)^{-1}\right)\right\}\\
\le&\exp\{-i_hj_h(hc_h)^{1-\varepsilon}\}\le\exp\left\{-a_hb_h(hc_h)^{-\varepsilon}/2\right\}\\
\le&\exp\left\{-c(hc_h)^{-\varepsilon}\right\}\qquad (2.5.32)
\end{aligned}
$$

对充分小的 h 成立. 定义 h_k 使得 $h_kc_{h_k}=k^{-1}$. 则由 (2.5.32) 得

$$
\begin{aligned}
&\liminf_{h\to 0}\sup_{0\le t\le a_h}\sup_{0\le v\le b_h}\frac{|X(R(t,h,v,c_h))|}{\left(2hc_h\log(hc_h)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}}\\
\ge&\liminf_{k\to\infty}\max_{0\le i\le i_{h_k}}\max_{0\le j\le j_{h_k}}\frac{|X(R(t_i,h_k,v_j,c_{h_k}))|}{\left(2h_kc_{h_k}\log(h_kc_{h_k})^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}}\ge 1-\varepsilon\quad \text{a.s.}
\end{aligned}
$$

即 (2.5.31) 成立. 由 (2.5.30) 和 (2.5.31) 得证定理 2.5.2 的结论.

2.5.2 OUP₂ 的大增量

在上一节中我们看到, 当一个或两个参数变量具有小的增量时, 过程 OUP₂ 的增量有多大. 现在我们要研究当一个或两个参数变量具有大的增量时, 过程 OUP₂ 的增量有多大.

定理 2.5.3 设 a_T 为 T 的函数, 满足 $0<a_T\le T$, $a_T\to\infty$ $(T\to\infty)$. 则

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{v>0}\sup_{0\le t\le T-a_T}\sup_{0\le s\le a_T}\frac{|X(t+s,v)-X(t,v)|}{\overline{\sigma}_1(t,v)\left\{2[\log\left((T-a_T)a_T\right)+\log\hat{v}]\right\}^{1/2}}\le 1 \quad \text{a.s.,} \tag{2.5.33}$$

其中 $\hat{v}=v\vee\log v^{-1}$, $\log\left((T-a_T)a_T\right)$ 意味着 $\log(T-a_T)+\log a_T$. 进一步, 如果还存在 $0\le b<1$ 使得

$$a_T=o(T^{b+\varepsilon}),\quad T\to\infty \tag{2.5.34}$$

对任何 $\varepsilon>0$ 成立, 则对固定的 $v>0$ 有

$$\liminf_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\frac{|X(t+a_T,v)-X(t,v)|}{\overline{\sigma}_1(t,v)\left\{2\log\left((T-a_T)a_T\right)\right\}^{1/2}}\ge\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^{1/2} \quad \text{a.s.,} \tag{2.5.35}$$

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{|X(T,v)-X(T-a_T,v)|}{\overline{\sigma}_1(T,v)\left\{2\log\left((T-a_T)a_T\right)\right\}^{1/2}}\ge\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^{1/2} \quad \text{a.s.} \tag{2.5.36}$$

在 (2.5.34) 中令 $b=0$, 得到定理 2.5.3 的一个直接推论.

推论 2.5.1 设当 $T\to\infty$ 时, $a_T=o(T^{\varepsilon})$ 对任何 $\varepsilon>0$ 成立. 则

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{v>0}\sup_{0\le t\le T-a_T}\sup_{0\le s\le a_T}\frac{|X(t+s,v)-X(t,v)|}{\overline{\sigma}_1(t,v)\{2(\log T+\log\hat{v})\}^{1/2}}=1 \quad \text{a.s.,}$$

且对任何固定的 $v>0$ 有

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\frac{|X(t+a_T,v)-X(t,v)|}{\overline{\sigma}_1(t,v)\{2\log T\}^{1/2}}=1\quad\text{a.s.},$$

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{|X(T,v)-X(T-a_T,v)|}{\overline{\sigma}_1(T,v)\{2\log T\}^{1/2}}=1\quad\text{a.s.}$$

注 2.5.2　由 $X(t,v)$ 关于 t 和 v 的对称性, 我们可以像注 2.5.1 一样给出关于 $X(t,v+u)-X(t,v)$ 对应的结果.

下述定理讨论的是 $X(t,v)$ 同时对两个参数变量的大增量的极限性质.

定理 2.5.4　设 a_T, b_T 和 V_T 为 T 的函数, 满足 $0<a_T\le T$, $0<b_T\le V_T$ 且 $a_T\to\infty$, $b_T\to\infty$ $(T\to\infty)$. 则

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le a_T}\sup_{0\le v\le V_T}\sup_{0\le u\le b_T}\frac{|X(R(t,s,v,u))|}{\overline{\sigma}_2(t,v)\{2\log(Ta_TV_Tb_T)\}^{1/2}}\le 1\quad\text{a.s.}\tag{2.5.37}$$

如果, 进一步还存在 $0\le b<1$ 使得对任意的 $\varepsilon>0$ 成立

$$a_Tb_T=o\big((TV_T)^{b+\varepsilon}\big),\quad T\to\infty,\tag{2.5.38}$$

则

$$\liminf_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le v\le V_T}\frac{|X(R(t,a_T,v,b_T))|}{\overline{\sigma}_2(t,v)\{2\log(Ta_TV_Tb_T)\}^{1/2}}\ge\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^{1/2}\quad\text{a.s.},\tag{2.5.39}$$

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{|X(R(T,a_T,V_T,b_T))|}{\overline{\sigma}_2(T,V_T)\{2\log(Ta_TV_Tb_T)\}^{1/2}}\ge\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^{1/2}\quad\text{a.s.}\tag{2.5.40}$$

与推论 2.5.1 类似, 我们有

推论 2.5.2　若在 (2.5.38) 中取 $b=0$, 则有

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le a_T}\sup_{0\le v\le V_T}\sup_{0\le u\le b_T}\frac{|X(R(t,s,v,u))|}{\overline{\sigma}_2(t,v)\{2\log(TV_T)\}^{1/2}}=1\quad\text{a.s.},$$

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le v\le V_T}\frac{|X(R(t,a_T,v,b_T))|}{\overline{\sigma}_2(t,v)\{2\log(TV_T)\}^{1/2}}=1\quad \text{a.s.},$$

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{|X(R(T,a_T,V_T,b_T))|}{\overline{\sigma}_2(T,V_T)\{2\log(TV_T)\}^{1/2}}=1\quad \text{a.s.}$$

为证明定理 2.5.3 和 2.5.4, 我们还需要下述有关连续模的结果, 其证明可沿着 (2.5.26) 和 (2.5.30) 的证明路线得到.

引理 2.5.4 对任何满足 $V_T\ge w_T$, $h_T\to 0$ 和 $w_T\to 0$ $(T\to\infty)$ 的正函数 h_T, w_T 和 V_T 我们有

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{v>0}\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le h_T}\frac{|X(t+s,v)-X(t,v)|}{\sigma_1(t,h_T,v)\{2[\log\frac{T}{h_T}+\log\log\frac{1}{\sigma_2(t,h_T,v)}]\}}$$
$$\le 1\quad \text{a.s},\tag{2.5.41}$$

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le h_T}\sup_{0\le v\le V_T}\sup_{0\le u\le w_T}\frac{|X(R(t,s,v,u))|}{\{2h_Tw_T\log(TV_T/h_Tw_T)\}^{1/2}}$$
$$\le 1\quad \text{a.s.}\tag{2.5.42}$$

下述引理与引理 2.5.1 类似.

引理 2.5.5 对任意的 $0<\varepsilon<1/2$, 存在 $b=b(\varepsilon)>0$ 和 $C=C(\varepsilon)>0$ 使得对任意固定的 $t\ge 0$ 和 $s\ge b$ 有,

$$P\left\{\sup_{v>0}\frac{|X(t+s,v)-X(t,v)|}{\overline{\sigma}_1(t,v)(x^2+2\log v)^{1/2}}\ge 1+2\varepsilon\right\}\le C\exp\left\{-\frac{1+\varepsilon}{2}x^2\right\}.$$

证明 注意到 $\overline{\sigma}_1(t,v)$ 为 (2.5.6) 所定义, 当 $(2-e^{-2\alpha t})/2\alpha>2\beta e^{-2\alpha t}$ $((2-e^{-2\alpha t})/2\alpha\le 2\beta e^{-2\alpha t})$ 时, 它关于 v 单调增加 (单调减少). 不妨设 $\overline{\sigma}_1(t,v)$ 关于 v 单调增加. 对任意的 $\varepsilon>0$, 令 $\theta=\theta(\varepsilon)>1$. 由

$$\overline{\sigma}_1(t,v_k)=\theta^{-k}$$

定义 v_k. 因为当 v 从 0 变到 ∞ 时, $\overline{\sigma}_1(t,v)$ 从 $e^{-2\alpha t}$ 单调增加到 $(2-e^{-2\alpha t})/4\alpha\beta$, 所以 v_k 的个数有限 (比如说 k 是从 k_0 到 k_1). 进一步, 由 $e^{-2\beta v_k'}=\theta^{-k}$ 定义 v_k' $(k=0,1,\cdots)$. 我们把 $\{v_k;k=k_0,\cdots,k_1\}$ 和 $\{v_k';k=0,1,\cdots\}$ 放在一起形成一个新的单调增加的序列 $\{v_k'';k=0,1,\cdots\}$. 由定义, $v_k''\le\frac{k}{2\beta}\log\theta$. 令 $K=[2\beta/\log\theta]+1$,

$$
\begin{aligned}
Y_{t,s}(v) := {} & e^{-\alpha(t+s)}(1-e^{\alpha s})X_0+e^{-\alpha(t+s)}(1-e^{\alpha s})\\
& \cdot\int_0^t\int_0^v e^{\alpha x+\beta y}dW(x,y)+e^{-\alpha(t+s)}\int_t^{t+s}\int_0^v e^{\alpha x+\beta y}dW(x,y).
\end{aligned}
$$

对固定的 t 和 s, 这是一个具有独立增量的 Gauss 过程. 显然

$$
e^{-2\beta v_{k-1}''}EY_{t,s}^2(v_k'')\le\theta\overline{\sigma}_1^2(t,v_k'')\le\theta^2\overline{\sigma}_1{}^2(t,v_{k-1}'').
$$

从而, 注意到 $\log x=\log(x\vee e)$, 对充分接近 1 的 $\theta>1$ 成立

$$
\begin{aligned}
& P\left\{\sup_{v>0}\frac{|X(t+s,v)-X(t,v)|}{\overline{\sigma}_1(t,v)(x^2+2\log v)^{1/2}}\ge 1+2\varepsilon\right\}\\
&\le\sum_{k=1}^{\infty}P\left\{\sup_{v_{k-1}''<v\le v_k''}\frac{|X(t+s,v)-X(t,v)|}{\overline{\sigma}_1(t,v)(x^2+2\log v)^{1/2}}\ge 1+2\varepsilon\right\}\\
&\le\sum_{k=1}^{\infty}P\left\{\sup_{v_{k-1}''<v\le v_k''}\frac{e^{-\beta v_{k-1}''}|Y_{t,s}(v)|}{\overline{\sigma}_1(t,v_{k-1}'')(x^2+2\log v_k'')^{1/2}}\ge 1+2\varepsilon\right\}\\
&\le\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}(1+2\varepsilon)\theta^{-2}(x^2+2\log v_{k-1}'')\right\}\\
&\le\exp\left\{-\frac{1}{2}(1+\varepsilon)x^2\right\}\left(K+\sum_{k=K}^{\infty}\exp\left\{-(1+\varepsilon)\log(\frac{k}{2\beta}\log\theta)\right\}\right)\\
&\le c\exp\left\{-\frac{1+\varepsilon}{2}x^2\right\}.
\end{aligned}
$$

定理 2.5.3 的证明 首先, 我们证明 (2.5.33). 对任意给定的充分小的 $h>0$ 有

$$
\sup_{v>0}\sup_{0\le t\le T}\frac{\sigma_1(t,h,v)}{\overline{\sigma}_1(t,v)}\le\alpha h+(2\alpha h)^{1/2}\le ch^{1/2},
$$

进一步,

$$\sup_{v>0}\sup_{0\le t\le T}\frac{\sigma_1(t,h,v)\{\log\frac{T}{h}+\log\log\frac{1}{\sigma_2(t,h,v)}\}^{1/2}}{\overline{\sigma}_1(t,v)\{\log((T-a_T)a_T)+\log\hat{v}\}^{1/2}}\le ch^{1/3}. \quad (2.5.43)$$

从而, 由引理 2.5.4 的 (2.5.41) 得

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{v>0}\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le h}\frac{|X(t+s,v)-X(t,v)|}{\overline{\sigma}_1(t,v)\{2\big(\log((T-a_T)a_T)+\log\hat{v}\big)\}^{1/2}}$$
$$\le ch^{1/3}\quad \text{a.s.} \quad (2.5.44)$$

因此, 为证 (2.5.33), 只要证明对任意的 $\varepsilon>0$ 有

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{v>0}\max_{0\le j\le j_T}\max_{0\le i\le i_T}\frac{|X((j+i)h,v)-X(jh,v)|}{\overline{\sigma}_1(jh,v)\{2\big(\log((T-a_T)a_T)+\log\hat{v}\big)\}^{1/2}}$$
$$\le 1+\varepsilon\quad \text{a.s.,} \quad (2.5.45)$$

其中 $j_T=[(T-a_T)/h]$, $i_T=[a_T/h]$. 对某 $\theta>1$, 记 $A_k=\{T:\theta^k\le a_T\le\theta^{k+1}\}$, $\mathcal{A}=\{k:A_k\ne\emptyset\}$. 设 T_k 为使得 $T_k-a_{T_k}=\max\{T-a_T:T\in A_k\}$ 成立的 T. 则

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{v>0}\max_{0\le j\le j_T}\max_{0\le i\le i_T}\frac{|X((j+i)h,v)-X(jh,v)|}{\overline{\sigma}_1(jh,v)\{2\big(\log((T-a_T)a_T)+\log v\big)\}^{1/2}}$$
$$\le \limsup_{\substack{k\to\infty\\k\in\mathcal{A}}}\sup_{v>0}\sup_{T\in A_k}\max_{0\le j\le j_T}\max_{0\le i\le i_T}|X((j+i)h,v)-X(jh,v)|/$$
$$\cdot\overline{\sigma}_1(jh,v)\{2\big(\log((T-a_T)a_T)+\log v\big)\}^{1/2}$$
$$\le \limsup_{\substack{k\to\infty\\k\in\mathcal{A}}}\sup_{v>0}\max_{0\le j\le j_{T_k}}\max_{0\le i\le \theta^{k+1}/h}|X((j+i)h,v)-X(jh,v)|/$$
$$\cdot\overline{\sigma}_1(jh,v)\{2(\log((j+1)h\theta^k)+\log v)\}^{1/2}. \quad (2.5.46)$$

由引理 2.5.5, 并注意到 $E\big(X(t+s,v)-X(t,v)\big)^2\le\overline{\sigma}_1^2(t,v)$, 对充分大的 k 有

$$P\Big\{\sup_{v>0}\max_{0\le j\le j_{T_k}}\max_{0\le i\le\theta^{k+1}/h}|X((j+i)h,v)-X(jh,v)|/$$

$$\cdot\,\overline{\sigma}_1(jh,v)\big\{2(\log((j+1)h\theta^k)+\log v)\big\}^{1/2}\ge 1+2\varepsilon\Big\}$$

$$\le\sum_{j=0}^{j_{T_k}}\sum_{i=0}^{[\theta^{k+1}/h]}P\left\{\sup_{v>0}\frac{|X((j+i)h,v)-X(jh,v)|}{\overline{\sigma}_1(jh,v)\big\{2(\log((j+1)h\theta^k)+\log v)\big\}^{1/2}}\right.$$

$$\left.\ge 1+2\varepsilon\right\}\le c\theta^{k+1}h^{-1}\sum_{j=0}^{j_{T_k}}\exp\{-(1+\varepsilon)\log((j+1)h\theta^k)\}$$

$$\le ch^{-2-\varepsilon}\theta^{1-\varepsilon k}\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)^{-1-\varepsilon}, \tag{2.5.47}$$

由此和 (2.5.46) 即得 (2.5.45). (2.5.43) 得证.

下面证明 (2.5.35). 由条件 (2.5.34) 得

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{\log((T-a_T)a_T)}{\log(T/a_T)}\le\frac{1+b}{1-b}. \tag{2.5.48}$$

因此, 为证 (2.5.35), 只要证明对任意的 $0<\varepsilon<1/4$

$$\liminf_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\frac{|X(t+a_T,v)-X(t,v)|}{\overline{\sigma}_1(t,v)(2\log(T/a_T))^{1/2}}\ge 1-\varepsilon\quad\text{a.s.} \tag{2.5.49}$$

令 $B_{nk}=\{T:kh\le a_T<(k+1)h,n-1\le T<n\}$, $a'_n=\inf\{a_T:n-1\le T<n\}$, $a^*_n=\sup\{a_T:n-1\le T<n\}$. 则

$$\liminf_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\frac{|X(t+a_T,v)-X(t,v)|}{\overline{\sigma}_1(t,v)(2\log(T/a_T))^{1/2}}$$

$$\ge\liminf_{n\to\infty}\min_{a'_n/h-1\le k<a^*_n/h}\inf_{T\in B_{nk}}\sup_{0\le t\le T-a_T}\frac{|X(t+a_T,v)-X(t,v)|}{\overline{\sigma}_1(t,v)(2\log(T/a_T))^{1/2}}$$

$$\ge\liminf_{n\to\infty}\min_{a'_n/h-1\le k<a^*_n/h}\sup_{0\le t\le n/2}\frac{|X(t+kh,v)-X(t,v)|}{\overline{\sigma}_1(t,v)(2\log(n/kh))^{1/2}}$$

$$-\limsup_{n\to\infty}\sup_{0\le t\le n}\sup_{0\le s\le h}\frac{|X(t+s,v)-X(t,v)|}{\overline{\sigma}_1(t,v)(2\log((n-1)/a^*_n))^{1/2}}$$

$$=:I_1-I_2. \tag{2.5.50}$$

由 (2.5.44) 和条件 (2.5.34), 我们得

$$I_2 \le ch^{1/3} \quad \text{a.s.} \tag{2.5.51}$$

进一步,

$$I_1 \ge \liminf_{n\to\infty} \min_{a'_n/h-1\le k<a^*_n/h} \max_{0\le j\le n/2kh} \frac{X((j+1)kh,v)-X(jkh,v)}{\overline{\sigma}_1(jkh,v)(2\log(n/kh))^{1/2}}. \tag{2.5.52}$$

容易证明对充分大的 k,

$$E\{X((j+1)kh,v)-X(jkh,v)\}\{X((i+1)kh,v)-X(ikh,v)\} \le 0 \tag{2.5.53}$$

对 $j\ne i$ 成立. 因此, 令 G_j, $j=0,1,\cdots$ 为独立的标准正态变量, 由 Slepian 引理得

$$\begin{aligned}
&P\left\{\min_{a'_n/h-1\le k<a^*_n/h}\max_{0\le j\le n/2kh}\frac{X((j+1)kh,v)-X(jkh,v)}{\overline{\sigma}_1(jkh,v)(2\log(n/kh))^{1/2}}\le 1-\varepsilon\right\}\\
&\le \sum_{k=[a'_n/h]-1}^{[a^*_n/h]} P\left\{\max_{0\le j\le n/2kh} G_j \le (1-\varepsilon)\Big(2\log\frac{n}{kh}\Big)^{1/2}\right\}\\
&\le \sum_{k=[a'_n/h]-1}^{[a^*_n/h]} \left(P\Big\{G_1\le(1-\varepsilon)\Big(2\log\frac{n}{kh}\Big)^{1/2}\Big\}\right)^{[n/2kh]+1}\\
&\le \sum_{k=[a'_n/h]-1}^{[a^*_n/h]} \left(1-\exp\Big\{-(1-\varepsilon)\log\frac{n}{kh}\Big\}\right)^{n/2kh}\\
&\le n^{b+\delta}h^{-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\Big(\frac{n}{a^*_n}\Big)^{\varepsilon}\right\}\le n^{b+\delta}h^{-1}\exp\{-n^{(1-b-\delta)\varepsilon}\}
\end{aligned} \tag{2.5.54}$$

对 $0<\delta<1-b$ 成立, 由此和 (2.5.52) 即得 $I_1\ge 1-\varepsilon$. 把 I_1 和 I_2 的估计代入 (2.5.50), 并注意到 h 的任意性, 我们得 (2.5.49), 因此 (2.5.35) 得证.

最后, 我们证明 (2.5.36). 令 $t_0=1$. 由 $t_k=t_{k-1}+a_{t_{k-1}}$ 定义 t_k, $k=1,2,\cdots$. 记 $D_n=\{k:\frac{1}{2}n\le t_k\le n-1\}$. 显然, 由条件 (2.5.34), 对 $k\in D_n$ 和任何 $0<\delta<1-b$, 我们有 $a_{t_k}=o(n^{b+\delta})$, 进而有

$$\sum_{k\in D_n} a_{t_k} \ge n-1-\frac{n}{2}-\max_{k\in D_{n-1}} a_{t_k} \ge \frac{1}{3}n$$

对充分大的 n 成立. 此外, 我们有一个与 (2.5.53) 类似的关系式. 因此, 若令 $t'=t'(t)$ 为方程 $t'-a_{t'}=t$ 的解, 则对 $n-1<T\le n$ 有

$$\begin{aligned}
&P\left\{\sup_{T/2\le t\le T}\frac{|X(t+a_{t'},v)-X(t,v)|}{\overline{\sigma}_1(t,v)(2\log T)^{1/2}}\le(1-\varepsilon)(1-b)^{1/2}\right\}\\
&\le P\left\{\max_{k\in D_n}\frac{X(t_k+a_{t'_k},v)-X(t_k,v)}{\overline{\sigma}_1(t_k,v)(2\log(n/a_{t_k}))^{1/2}}\le 1-\varepsilon/2\right\}\\
&\le \prod_{k\in D_n}\left(1-\exp\left\{-(1-\varepsilon/2)\log\frac{n}{a_{t_k}}\right\}\right)\\
&\le \exp\left\{-\sum_{k\in D_n}(a_{t_k}/n)^{1-\varepsilon/2}\right\}\\
&\le \exp\left\{-c\Big(n/\max_{k\in D_n}a_{t_k}\Big)^{\varepsilon/2}\right\}\\
&\le \exp(-cn^{(1-b-\delta)\varepsilon/2})\to 0,\quad n\to\infty. \qquad (2.5.55)
\end{aligned}$$

从而, 注意到

$$\overline{\sigma}_1^2(t,v)\to(1-e^{-2\beta v})/2\alpha\beta=:\overline{\sigma}_1^2(v),\quad t\to\infty,$$

我们得

$$\begin{aligned}
&P\left\{\sup_{\frac{1}{2}T\le t-a_t\le T}\frac{|X(t,v)-X(t-a_t,v)|}{\overline{\sigma}_1(t,v)\{2\log((t-a_t)a_t)\}^{1/2}}\ge(1-\varepsilon)\Big(\frac{1-b}{1+b}\Big)^{1/2}\right\}\\
&\ge P\left\{\sup_{\frac{1}{2}T\le t\le T}\frac{|X(t+a_{t'},v)-X(t,v)|}{\overline{\sigma}_1(v)(2\log T)^{1/2}}\ge\Big(1-\frac{\varepsilon}{2}\Big)(1-b)^{1/2}\right\}\\
&\to 1,\quad T\to\infty.
\end{aligned}$$

(2.5.36) 得证.

定理 2.5.4 的证明 证明与定理 2.5.3 的类似, 我们只给出不同之处.

由引理 2.5.4 的 (2.5.42) 并注意到 $\inf_{t,v}\overline{\sigma}_2(t,v)>0$, 我们得

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le h}\sup_{0\le v\le V_T}\sup_{0\le u\le h}\frac{|X(R(t,s,v,u))|}{\overline{\sigma}_2(t,v)\{2\log(Ta_TV_Tb_T)\}^{1/2}}$$
$$\le ch^{2/3}\quad \text{a.s.} \tag{2.5.56}$$

从而 (2.5.37) 可由下式得到

$$\limsup_{T\to\infty}\max_{0\le j\le j_T}\max_{0\le i\le i_T}\max_{0\le r\le r_T}\max_{0\le l\le l_T}\frac{|X(R(jh,ih,rh,lh))|}{\overline{\sigma}_2(jh,rh)\{2\log(Ta_TV_Tb_T)\}^{1/2}}$$
$$\le 1+\varepsilon\quad \text{a.s.} \tag{2.5.57}$$

对任意的 $\varepsilon>0$ 成立，其中 $j_T=[T/h]$, $i_T=[a_T/h]$, $r_T=[V_T/h]$, $l_T=[b_T/h]$. 对某 $\delta>1$ 令 $A_{kl}=\{T:\theta^k\le a_T<\theta^{k+1},\theta^l\le b_T<\theta^{l+1}\}$. 记 $\mathcal{A}=\{(k,l):A_{kl}\ne\emptyset\}$, $T_{kl}=\sup\{T:T\in A_{kl}\}$, $V_{T'_{kl}}=\sup\{V_T:T\in A_{kl}\}$. 则 (2.5.57) 的左边不超过

$$\limsup_{\substack{k,l\to\infty\\(k,l)\in\mathcal{A}}}\max_{0\le j\le j_{T_{kl}}}\max_{0\le i\le\theta^{k+1}/h}\max_{0\le r\le r_{T'_{kl}}}\max_{0\le w\le\theta^{l+1}/h}$$
$$\frac{|X(R(jh,ih,rh,wh))|}{\overline{\sigma}_2(jh,rh)\{2\log((j+1)(r+1)h^2\theta^{k+l})\}^{1/2}}.$$

注意到 $EX^2(R(t,s,v,u))\le\overline{\sigma}_2^2(t,v)$, 我们得

$$P\Big\{\max_{0\le j\le j_{T_{kl}}}\max_{0\le i\le\theta^{k+1}/h}\max_{0\le r\le r_{T'_{kl}}}\max_{0\le w\le\theta^{l+1}/h}|X(R(jh,ih,rh,wh))|/$$
$$\overline{\sigma}_2(jh,rh)\{2\log((j+1)(r+1)h^2\theta^{k+l})\}^{1/2}\ge 1+\varepsilon\Big\}$$
$$\le\sum_{j=0}^{j_{T_{kl}}}\sum_{i=0}^{[\theta^{k+1}/h]}\sum_{r=0}^{r_{T'_{kl}}}\sum_{w=0}^{[\theta^{l+1}/h]}P\{|X(R(jh,ih,rh,wh))|/$$
$$\overline{\sigma}_2(jh,rh)\{2\log((j+1)(r+1)h^2\theta^{k+l})\}^{1/2}\ge 1+\varepsilon\}$$
$$\le c\theta^{k+l+2}h^{-2}\sum_{j=0}^{j_{T_{kl}}}\sum_{r=0}^{r_{T'_{kl}}}\exp\{-(1+\varepsilon)\log((j+1)(r+1)h^2\theta^{k+l})\}$$
$$\le ch^{-4-2\varepsilon}\theta^{2-\varepsilon(k+l)}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}(j+1)^{-(1+\varepsilon)}(r+1)^{-(1+\varepsilon)}.$$

由 Borel-Cantelli 引理 (其在两指标情形的推广是显然的) 有 (2.5.57), 从而 (2.5.37) 得证.

现在证明 (2.5.39). 由条件 (2.5.38), (2.5.39) 可由下式得到

$$\liminf_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le v\le V_T}\frac{|X(R(t,a_T,v,b_T))|}{\overline{\sigma}_2(t,v)\{2\log(TV_T/(a_Tb_T))\}^{1/2}}$$
$$\ge 1-\varepsilon \quad \text{a.s.}$$

令 $B_{mnkl}=\{T: kh\le a_T\le(k+1)h, lh\le b_T\le(l+1)h, m-1\le T<m, n-1\le V_T<n\}$, $a_m^*=\sup\{a_T: m-1\le T<m\}$, $a'_m=\inf\{a_T: m-1\le T<m\}$, $b_n^*=\sup\{b_T: n-1\le V_T<n\}$, $b'_n=\inf\{b_T: n-1\le V_T<n\}$. 则

$$\liminf_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le v\le V_T}\frac{|X(R(t,a_T,v,b_T))|}{\overline{\sigma}_2(t,v)\{2\log(TV_T/(a_Tb_T))\}^{1/2}}$$
$$\ge\liminf_{m,n\to\infty}\min_{\substack{a'_m/h-1\le k<a_m^*/h\\ b'_n/h-1\le l<b_n^*/h}}\inf_{T\in B_{mnkl}}\sup_{\substack{0\le t\le T\\ 0\le v\le V_T}}|X(R(t,kh,v,lh))|/$$
$$\cdot\,\overline{\sigma}_2(t,v)\{2\log(mn/(klh^2))\}^{1/2}$$
$$-\limsup_{m,n\to\infty}\sup_{\substack{0\le t\le m\\ 0\le s\le h}}\sup_{\substack{0\le v\le n\\ 0\le u\le h}}\frac{|X(R(t,s,v,u))|}{\overline{\sigma}_2(t,v)\{2\log((m-1)(n-1)/(a_m^*b_n^*))\}^{1/2}}$$
$$:=J_1-J_2.$$

由 (2.5.56) 和 (2.5.38) 得

$$J_2\le ch^{2/3}\quad \text{a.s.}$$

对 J_1, 我们有

$$J_1\ge\liminf_{m,n\to\infty}\min_{\substack{a'_m/h-1\le k<a_m^*/h\\ b'_n/h-1\le l<b_n^*/h}}\max_{\substack{0\le j\le m/2kh\\ 0\le i\le n/2lh}}X(R(jkh,kh,ilh,lh))/$$
$$\cdot\,\overline{\sigma}_2(jkh,ilh)\{2\log(mn/(klh^2))\}^{1/2}.$$

通过一些初等计算, 可以验证: 对充分大的 k 和 / 或 l, $j\ne p$和 / 或 $i\ne q$, 有

$$EX(R(jkh,kh,ilh,lh))X(R(pkh,kh,qlh,lh))\le 0. \qquad (2.5.58)$$

余下的证明与定理 2.5.3 的类似 (见 (2.5.54)), 因此从略.

模仿 (2.5.36) 的证明, 利用与 (2.5.58) 类似的非正相关性, 我们可证 (2.5.40), 细节从略.

§2.6 带核的两参数 Gauss 过程

在前一节中, 我们研究了由下式定义的两参数 O-U 过程 (OUP_2) $X(t,v)$:

$$X(t,v)=e^{-\alpha t-\beta v}\left\{X_0+\sigma\int_0^t\int_0^v e^{\alpha x+\beta y}\,dW(x,y)\right\}. \qquad (2.6.1)$$

若 $X_0=0$, 则 OUP_2 $X(t,v)$ 可以写成

$$X(t,v)=\int_0^t\int_0^v \sigma e^{-\alpha t-\beta v}e^{\alpha x+\beta y}\,dW(x,y). \qquad (2.6.2)$$

在第 2.1.5 节, 我们研究了由 (2.1.22) 定义的独立 O-U 过程的无穷级数, 它是过程 $X(\cdot,n)=\sum_{k=1}^n X_k(\cdot)$ 当 $n\to\infty$ 时的极限. 对方程 (2.1.22) 从 $-\infty$ 到 t 进行积分, 那么 O-U 过程 $X_i(\cdot)$ 可以写成

$$X_i(t)=\int_{-\infty}^t \exp(-\lambda_i|t-s|)(2\gamma_i)^{1/2}\,dW_i(s), \quad i=1,2,\cdots, \qquad (2.6.3)$$

其中 $\{W_i(t);-\infty<t<\infty\}$ 为独立的 Wiener 过程, 从而我们也有

$$X(t,n)=\sum_{k=1}^n X_k(t)=\sum_{k=1}^n\int_{-\infty}^t \exp(-\lambda_k|t-s|)(2\gamma_k)^{1/2}\,dW_k(s). \qquad (2.6.4)$$

后者导致我们去研究下述两参数 Gauss 过程

$$X(t,v)=\int_0^v\int_{-\infty}^t \exp\big(-\lambda(y)(t-x)\big)\big(2\gamma(y)\big)^{1/2}\,dW(x,y), \qquad (2.6.5)$$

其中 $\gamma(y)$ 和 $\lambda(y)$ 假设为 $[0,\infty)$ 上的正的连续函数, $\{W(x,y);-\infty<x,y<\infty\}$ 为标准两参数 Wiener 过程 (见 2.3 节).

综合上述一些过程的表达形式就使得我们去进一步研究如下形式更加一般的两参数 Gauss 过程 $\{X(t,v); t\in\mathcal{R}, v\in\mathcal{R}_+\}$:

$$X(t,v)=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(t,v,x,y)\,dW(x,y), \tag{2.6.6}$$

其中核函数 $\Gamma(t,v,x,y)$ 假设为在 $\mathcal{R}_+\times\mathcal{R}$ 上关于 (x,y) 平方可积, $W(x,y)$ 为标准两参数 Wiener 过程. 从而 $X(t,v)$ 为零均值 Gauss 过程, 具有协方差函数

$$\operatorname{Cov}\big(X(t,v),X(s,u)\big)=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(t,v,x,y)\Gamma(s,u,x,y)\,dx\,dy. \tag{2.6.7}$$

令

$$H_1^2(t,s,v)=E\{X(t+s,v)-X(t,v)\}^2, \tag{2.6.8}$$

$$X\big(R(t,s,v,u)\big)=X(t+s,v+u)-X(t,v+u)-X(t+s,v)+X(t,v),$$

$$H_2^2(t,s,v,u)=EX^2\big(R(t,s,v,u)\big), \tag{2.6.9}$$

其中 $R(t,s,v,u)=[t,t+s]\times[v,v+u]$. 易知

$$H_1^2(t,s,v)=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\big(\Gamma(t+s,v,x,y)-\Gamma(t,v,x,y)\big)^2\,dxdy, \tag{2.6.10}$$

$$\begin{aligned}H_2^2(t,s,v,u)=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\big(&\Gamma(t+s,v+u,x,y)-\Gamma(t,v+u,x,y)\\&-\Gamma(t+s,v,x,y)+\Gamma(t,v,x,y)\big)^2\,dxdy.\end{aligned} \tag{2.6.11}$$

下面是一些例子.

例 2.6.1 若 $\Gamma(t,v,x,y)=I_{(-\infty,t]\times[0,v]}(x,y)$, $-\infty<t<\infty$, $0\le v<\infty$, 则

$$X(t,v)=W(t,v),$$

$$H_1^2(t,s,v)=sv,\ 0\le s<\infty,$$

$$H_2^2(t,s,v,u)=su,\ 0\le s,u<\infty.$$

例 2.6.2　若 $\Gamma(t,v,x,y) = I_{[0,t]\times[0,v]}(x,y) - tI_{[0,1]\times[0,v]}(x,y)$, $0 \le t \le 1$, $0 \le v < \infty$, 则 $X(t,v) = W(t,v) - tW(1,v)$ 为一个 Kiefer 过程 (见 Csörgő 和 Révész (1981) 的 1.15 节), 且

$$H_1^2(t,s,v) = s(1-s)v, \quad 0 \le s \le 1, \quad 0 \le v < \infty,$$

$$H_2^2(t,s,v,u) = s(1-s)u, \quad 0 \le s \le 1, \quad 0 \le u < \infty.$$

例 2.6.3　对 $-\infty < t < \infty, 0 < v < \infty$ 记

$$\Gamma(t,v,x,y) = I_{(-\infty,t]\times(0,v]}(x,y)\exp\big(-\lambda(y)(t-x)\big)\big(2\gamma(y)\big)^{1/2},$$

其中 $\lambda(y)$ 和 $\gamma(y)$ 为在 $[0,\infty)$ 上的正连续函数, 则 $X(t,v)$ 为由 (2.6.5) 所示的 Gauss 过程, 且

$$H_1^2(t,s,v) = 2\int_0^v \frac{\gamma(x)}{\lambda(x)}\Big(1-\exp\big(-\lambda(x)s\big)\Big)\,dx,$$

$$H_2^2(t,s,v,u) = 2\int_v^{v+u} \frac{\gamma(x)}{\lambda(x)}\Big(1-\exp\big(-\lambda(x)s\big)\Big)\,dx.$$

例 2.6.4　对 $-\infty < t < \infty, 0 < v < \infty$ 记

$$\Gamma(t,v,x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\phi_k(v)I_{(-\infty,t]\times(k,k+1]}(x,y)\exp\big(-\lambda_k(t-x)\big)\big(2\gamma_k\big)^{1/2},$$

则

$$H_1^2(t,s,v) = 2\sum_{k=0}^{\infty}\phi_k^2(v)(1-e^{-\lambda_k s})\Big(\frac{\gamma_k}{\lambda_k}\Big),$$

$$H_2^2(t,s,v,u) = 2\sum_{k=0}^{\infty}\big(\phi_k(v+u)-\phi_k(v)\big)^2(1-e^{-\lambda_k s})\frac{\gamma_k}{\lambda_k},$$

$$X(t,v) = \sum_{k=0}^{\infty}\phi_k(v)X_k(t),$$

其中 $\{X_k(t); -\infty < t < \infty\}$ 为独立的 O-U 过程, 它们的系数为 $\gamma_k \ge 0$, $\lambda_k > 0$.

Csörgő 和 Lin (1991), 林正炎 (1991) 及 Csörgő, Lin 和 Shao (1994b) 研究了 (2.6.6) 所定义的 $X(t,v)$ 的样本轨道性质. 在这一节里我们给出关于 $X(t,v)$ 增量的大偏差的一些结果. 利用这些大偏差我们建立了有关 $X(t,v)$ 轨道性质的定理. 在这方面的早期研究读者可参看 Csörgő 和 Lin (1991) 及林正炎 (1991), 较一般的结果可参看 Csörgő, Lin 和 Shao (1994b).

记

$$\begin{aligned} H^2(t,s,v,u) &= E\big(X(t+s,v+u)-X(t,v)\big)^2 \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \big(\Gamma(t+s,v+u,x,y)-\Gamma(t,v,x,y)\big)^2\,dxdy. \end{aligned} \tag{2.6.12}$$

令

$$\phi(h,B)=\sup_{0\le s,u\le h,|t|\le B,|v|\le B} H(t,s,v,u).$$

由定理 2.1.3, 我们有: 若

$$\int_0^\infty \phi(e^{-y^2},B)dy<\infty \quad \forall B>0, \tag{2.6.13}$$

则 $X(t,v)$ 几乎处处连续. 由于我们只对 $X(t,v)$ 的连续模和其增量的一些轨道性质感兴趣, 为了叙述方便, 在这一节中我们总设 $X(t,v)$ 几乎处处连续. 我们还设 $H_1(t,s,v)$ 对 s 非降, $H_2(t,s,v,u)$ 对 s 和 u 非降, a_T, b_T, c_T 和 d_T 为 T 的连续函数, $H_1(t,s,T)$ 和 $H_2(t,s,v,u)$ 为 T, s, u 的连续函数.

2.6.1 大偏差

命题 2.6.1 设 $A\subset\mathcal{R}_+$, $s_0>0$, $b_{1,T}\le b_{2,T}$. 假设

$$\begin{aligned} &E\big(X(t+s,v)-X(t,v)\big)\big(X(t+s,u)-X(t,u)\big) \\ &\quad\ge E\big(X(t+s,u)-X(t,u)\big)^2 \end{aligned} \tag{2.6.14}$$

对任何 $v\ge u$ 和 t,s 成立, 且存在正数 c_0 和 α 使得

$$\frac{H_1(t,s,T)}{s^\alpha}\le c_0\frac{H_1(t,s_1,T)}{s_1^\alpha} \tag{2.6.15}$$

对任何 $T \in A$, $b_{1,T} \le t \le b_{2,T}$, $0 \le s \le s_1 \le s_0$ 成立. 则对任意的 $0 < \varepsilon < 1/(1 + c_0^{1+\alpha})$, 存在正只依赖于 α, c_0, ε 的常数 $C(\varepsilon)$ 使得对任何 $x \ge 1$ 有

$$P\left\{\sup_{T\in A}\sup_{b_{1,T}\le t\le b_{2,T}}\sup_{0\le s\le s_0}\frac{|X(t+s,T)-X(t,T)|}{x\{H_1(t,s_0,T^*)+H_1(t+s,\varepsilon s_0,T^*)\}}\right.$$
$$\left.\ge 1+\varepsilon\right\}\le C(\varepsilon)\sup_{T\in A}\left(\frac{b_{2,T}-b_{1,T}}{s_0}+1\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad (2.6.16)$$

其中 $T^* = \sup\{T : T \in A\}$.

证明 在证明 (2.6.16) 前, 我们先证明: 对任意固定的 t 和 s

$$P\left\{\sup_{T\in A}\frac{|X(t+s,T)-X(t,T)|}{H_1^*(t,s,T^*)y}\ge 1\right\}\le 8\exp(-y^2/2) \quad (2.6.17)$$

对任何 $y > 0$ 和 $H_1^*(t,s,T^*) \ge H_1(t,s,T^*)$ 成立.

令 $Y(T)$ 为一个独立增量的 Gauss 过程, 满足 $Y(T) \overset{\mathcal{D}}{=} X(t+s,T) - X(t,T)$. 则 $EY^2(T) = H_1^2(t,s,T)$ 且由 (2.6.14),

$$\begin{aligned}EY(T)Y(T') =&H_1^2(t,s,T')\\ &\le E\big(X(t+s,T)-X(t,T)\big)\big(X(t+s,T')-X(t,T')\big)\end{aligned}$$

对任何 $T > T'$ 成立. 由 (2.6.14) 还有 $H_1(t,s,T)$ 对 T 非降. 由 Slepian 引理得

$$\begin{aligned}&P\left\{\sup_{T\in A}\frac{|X(t+s,T)-X(t,T)|}{H_1^*(t,s,T^*)y}\ge 1\right\}\\ &\le P\left\{\sup_{T\in A}\frac{X(t+s,T)-X(t,T)}{H_1^*(t,s,T^*)y}\ge 1\right\}\\ &\quad + P\left\{\sup_{T\in A}\frac{-\big(X(t+s,T)-X(t,T)\big)}{H_1^*(t,s,T^*)y}\ge 1\right\}\\ &\le P\left\{\sup_{T\in A}\frac{Y(T)}{H_1^*(t,s,T^*)y}\ge 1\right\}+P\left\{\sup_{T\in A}\frac{-Y(T)}{H_1^*(t,s,T^*)y}\ge 1\right\}\\ &\le 2P\left\{\sup_{T\in A}\frac{|Y(T)|}{H_1^*(t,s,T^*)y}\ge 1\right\}\le 8\exp\left(-y^2/2\right),\end{aligned}$$

(2.6.17) 得证. 我们现在证明 (2.6.16). 令 $K=2^{2^k}$,

$$t_{j+k}=\left(\left[\frac{t2^{2^{j+k}}}{s_0}\right]+1\right)s_0/2^{2^{j+k}},\quad j=0,1,2,\cdots.$$

由于我们已经假设 $X(\cdot,\cdot)$ 几乎处处连续, 可写

$$\begin{aligned}|X(t+s,T)-X(t,T)|\le&|X\big((t+s)_k,T\big)-X(t_k,T)|\\&+\sum_{j=0}^{\infty}|X\big((t+s)_{k+j+1},T\big)-X\big((t+s)_{k+j},T\big)|\\&+\sum_{j=0}^{\infty}|X\big(t_{k+j+1},T\big)-X\big(t_{k+j},T\big)|.\end{aligned}\tag{2.6.18}$$

由 $H_1(t,s,T)$ 和 t_{k+j} 的定义, 显然有

$$\begin{aligned}&H_1(t_k,(t+s)_k-t_k,T)\le H_1(t,t_k-t,T)+H_1(t,(t+s)_k-t,T)\\&\quad\le H_1(t,s_0,T)+H_1(t,s_0/K,T)+H_1(t+s,s_0/K,T),\end{aligned}\tag{2.6.19}$$

$$\begin{aligned}&H_1\big((t+s)_{k+j+1},(t+s)_{k+j}-(t+s)_{k+j+1},T\big)\\&\qquad\le 2H_1(t+s,s_0/2^{2^{k+j}},T),\end{aligned}\tag{2.6.20}$$

$$H_1\big(t_{k+j+1},t_{k+j}-t_{k+j+1},T\big)\le 2H_1(t,s_0/2^{2^{k+j}},T).\tag{2.6.21}$$

由 (2.6.19) 和 (2.6.17) 得

$$\begin{aligned}&P\Big\{\sup_{T\in A}\sup_{b_{1,T}\le T\le b_{2,T}}\sup_{0\le s\le s_0}|X\big((t+s)_k,T\big)-X(t_k,T)|/\\&\qquad\big\{\big(H_1(t,s_0,T^*)+H_1(t,s_0/K,T^*)+H_1(t+s,s_0/K,T^*)\big)x\big\}\ge 1\Big\}\\&\quad\le 8\cdot 2^{2^{k+1}}\sup_{T\in A}\left(\frac{b_{2,T}-b_{1,T}}{s_0}+1\right)\exp(-x^2/2).\end{aligned}\tag{2.6.22}$$

同理, 由 (2.6.20), (2.6.21) 和 (2.6.17), 对任意的 $x_j>0$ 有

$$P\left\{\sup_{T\in A}\sup_{b_{1,T}\le T\le b_{2,T}}\sup_{0\le s\le s_0}\left|X\big((t+s)_{k+j+1},T\big)-X\big((t+s)_{k+j},T\big)\right|/\right.$$

$$\left.\left\{2H_1(t+s,s_0/2^{2^{k+j}},T^*)x_j\right\}\ge 1\right\}$$

$$\le 82^{2^{k+j+1}}\sup_{T\in A}\left(\frac{b_{2,T}-b_{1,T}}{s_0}+1\right)\exp(-x_j^2/2), \tag{2.6.23}$$

$$P\left\{\sup_{T\in A}\sup_{b_{1,T}\le T\le b_{2,T}}\sup_{0\le s\le s_0}\left|X\big(t_{k+j+1},T\big)-X\big(t_{k+j},T\big)\right|/\right.$$

$$\left.\left\{2H_1(t,s_0/2^{2^{k+j}},T^*)x_j\right\}\ge 1\right\}$$

$$\le 82^{2^{k+j+1}}\sup_{T\in A}\left(\frac{b_{2,T}-b_{1,T}}{s_0}+1\right)\exp(-x_j^2/2). \tag{2.6.24}$$

由 (2.6.22)—(2.6.24) 得

$$P\left\{\sup_{T\in A}\sup_{b_{1,T}\le T\le b_{2,T}}\sup_{0\le s\le s_0}\left|X(t+s,T)-X(t,T)\right|/\right.$$

$$\left\{\big(H_1(t,s_0,T^*)+H_1(t,s_0/K,T^*)+H_1(t+s,s_0/K,T^*)\big)x\right.$$

$$\left.\left.+2\sum_{j=0}^{\infty}\big(H_1(t+s,s_0/2^{2^{k+j}},T^*)+H_1(t,s_0/2^{2^{k+j}},T^*)\big)x_j\right\}\ge 1\right\}$$

$$\le 8\sup_{T\in A}\left(\frac{b_{2,T}-b_{1,T}}{s_0}+1\right)\Big(2^{2^{k+1}}\exp(-x^2/2)$$

$$+\sum_{j=0}^{\infty}2^{2^{k+j+1}}\exp(-x_j^2/2)\Big). \tag{2.6.25}$$

令 $x_j^2=x^2+2^{k+j+2}$. 由 (2.6.15), 对充分大的 k 和任何 $x\geq 1$ 有

$$\Big(\big(H_1(t,s,T^*)+H_1(t,s_0/K,T^*)+H_1(t+s,s_0/K,T^*)\big)x$$

$$+2\sum_{j=0}^{\infty}\big(H_1(t+s,s_0/2^{2^{k+j}},T^*)+H_1(t,s_0/2^{2^{k+j}},T^*)\big)x_j$$

$$\le\Big(H_1(t,s_0,T^*)+c_0\Big(\frac{1}{K}\Big)^{\alpha}H_1(t,s_0,T^*)x$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{1}{\varepsilon K}\right)^{\alpha} c_0 H_1(t+s,\varepsilon s_0,T^*)\Big)x \\
&+2c_0\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\varepsilon 2^{2^{k+j}}}\right)^{\alpha} H_1(t+s,\varepsilon s_0,T^*)\left(x+2^{\frac{k+j+1}{2}}\right) \\
&+2c_0\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{2^{k+j}}}\right)^{\alpha} H_1(t,s_0,T^*)\left(x+2^{\frac{k+j+1}{2}}\right) \\
\le &\Big(H_1(t,s_0,T^*)+H_1(t+s,\varepsilon s_0,T^*)\Big) \\
&\cdot\left(x\left(1+3c_0\left(1+\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}\right)\right)\sum_{j=0}^{\infty}2^{-\alpha 2^{k+j}}\right)+ \\
&2c_0\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}+1\right)2^{-\alpha 2^{k+j}+\frac{k+j+1}{2}}\Big) \\
\le &\Big(H_1(t,s_0,T^*)+H_1(t+s,\varepsilon s_0,T^*)\Big)(1+\varepsilon)x, \qquad (2.6.26)
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{\infty}2^{2^{k+j+1}}\exp\left(-x_j^2/2\right) \\
&\qquad=\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\sum_{j=0}^{\infty}(2/e)^{2^{k+j+1}}\le C(\varepsilon)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \quad (2.6.27)
\end{aligned}
$$

综合 (2.6.25)—(2.6.27) 得

$$
\begin{aligned}
P\Bigg\{&\sup_{T\in A}\sup_{b_{1,T}\le t\le b_{2,T}}\sup_{0\le s\le s_0}\frac{|X(t+s,T)-X(t,T)|}{x\{H_1(t,s_0,T^*)+H_1(t+s,\varepsilon s_0,T^*)\}} \\
&\ge 1+\varepsilon\Bigg\}\le C(\varepsilon)\sup_{T\in A}\left(\frac{b_{2,T}-b_{1,T}}{s_0}+1\right)\exp\left(-x^2/2\right),
\end{aligned}
$$

这就是所要证的.

为了研究 $X(t,v)$ 同时关于 t 和 v 的增量, 我们给出另一个关于 $X(t,v)$ 的大偏差结果. 记

$$
\begin{aligned}
&H_{21}(t,s,v,u,K)\\
=&2H_2\Big(t,s,v-\frac{c_T}{K},\frac{2c_T}{K}\Big)+2H_2\Big(t,s,v+u-\frac{c_T}{K},\frac{2c_T}{K}\Big)\\
&+H_2\Big(t,\frac{a_T}{K},v,c_T\Big(1+\frac{2}{K}\Big)\Big)+2H_2\Big(t+s,\frac{a_T}{K},v,c_T\Big(1+\frac{2}{K}\Big)\Big).
\end{aligned}
$$

这里以及本节的余下部分中，若 $v<0$, 记

$$H_2(t,s,v,u)=H_2(t,s,0,u).$$

命题 2.6.2 设 $H_2(t,s,v,u)$ 对 s 和 u 非降. 假设对任何 $t,s,a\geq v\geq v'>0$ 有

$$
\begin{aligned}
&EX\big(R(t,s,v',a-v')\big)X\big(R(t,s,v,a-v)\big)\\
&\geq EX^2\big(R(t,s,v,a-v)\big),
\end{aligned}
\tag{2.6.28}
$$

且存在正数 c_0 和 α, 使得对任何 $0\leq s\leq s_1\leq a_T$, $0\leq v\leq d_T+c_T$, $0\leq u\leq 2c_T$, $|t|\leq b_T$ 成立

$$\frac{H_2(t,s,v,u)}{s^\alpha}\leq c_0\frac{H_2(t,s_1,v,u)}{s_1^\alpha}.\tag{2.6.29}$$

则对任意的 $0<\varepsilon<1$, 存在只依赖于 ε, c_0, α 的常数 $C(\varepsilon)$, 使得

$$
\begin{aligned}
P\Big\{&\sup_{0\leq v\leq d_T}\sup_{0\leq u\leq c_T}\sup_{|t|\leq b_T}\sup_{0\leq s\leq a_T}\big|X\big(R(t,s,v,u)\big)\big|/ \qquad (2.6.30)\\
&\big\{H_2(t,a_T,v,c_T(1+\varepsilon))+3H_2(t,a_T,v-\varepsilon c_T,2\varepsilon c_T)\\
&+3H_2(t,a_T,v+u-\varepsilon c_T,2\varepsilon c_T)+H_2(t,\varepsilon a_T,v-\varepsilon c_T,c_T(1+\varepsilon))\\
&+H_2(t,\varepsilon a_T,v+u-\varepsilon c_T,c_T(1+\varepsilon))\\
&+H_2(t+s,\varepsilon a_T,v-\varepsilon a_T,c_T(1+\varepsilon))\\
&+H_2(t+s,\varepsilon a_T,v+u-\varepsilon a_T,c_T(1+\varepsilon))\big\}\geq(1+\varepsilon)x\Big\}\\
\leq{}& C(\varepsilon)\Big(\frac{d_T}{c_T}+1\Big)\Big(\frac{b_T}{a_T}+1\Big)e^{-x^2/2}
\end{aligned}
$$

对任何 $x\geq 1$ 成立.

证明 令

$$t_{k+j} = \left(\left[\frac{t2^{2^{k+j}}}{a_T}\right] + 1\right) a_T / 2^{2^{k+j}},$$

$$v'_{k+j} = \left(\left[\frac{v2^{2^{k+j}}}{c_T}\right] + 1\right) c_T / 2^{2^{k+j}}.$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\left|X\big(R(t,s,v,u)\big)\right| \\
\le&\left|X\big(R(t_k,(t+s)_k - t_k, v'_k, (v+u)'_k - v'_k)\big)\right| \\
&+ \left|X\big(R(t+s,(t+s)_k - (t+s), v'_k, (v+u)'_k - v'_k)\big)\right| \\
&+ \left|X\big(R(t, t_k - t, v'_k, (v+u)'_k - v'_k)\big)\right| \\
&+ \left|X\big(R(t,s,v,v'_k - v)\big)\right| + \left|X\big(R(t,s,v+u,(v+u)'_k - (v+u))\big)\right| \\
\le&\left|X\big(R(t_k,(t+s)_k - t_k, v'_k, (v+u)'_k - v'_k)\big)\right| \\
&+ \sum_{j=0}^{\infty}\Big|X\big(R((t+s)_{k+j+1},(t+s)_{k+j} \\
&\qquad - (t+s)_{k+j+1}, v'_k, (v+u)'_k - v'_k)\big)\Big| \\
&+ \sum_{j=0}^{\infty}\left|X\big(R(t_{k+j+1}, t_{k+j} - t_{k+j+1}, v'_k, (v+u)'_k - v'_k)\big)\right| \\
&+ \left|X\big(R(t,s,v,v'_k - v)\big)\right| + \left|X\big(R(t,s,v+u,(v+u)'_k - (v+u))\big)\right|.
\end{aligned} \tag{2.6.31}$$

由 (2.6.28), 对任意的 $v' \ge v$, $v+u \ge v'+u'$ 有

$$H_2(t,s,v,u) \ge H_2(t,s,v',u'). \tag{2.6.32}$$

由 (2.6.32) 得

$$\begin{aligned}
&H_2(t_k,(t+s)_k - t_k, v'_k, (v+u)'_k - v'_k) \\
\le&H_2(t,s,v,u) + H_2(t+s,(t+s)_k - (t+s), v'_k, (v+u)'_k - v'_k) \\
&+ H_2(t, t_k - t, v'_k, (v+u)'_k - v'_k) \\
&+ H_2\big(t,s,v,v'_k - v\big) + H_2\big(t,s,v+u,(v+u)'_k - (v+u)\big) \\
\le&H_2(t,s,v,u) + H_{21}(t,s,v,u,K).
\end{aligned}$$

同样，我们有

$$
\begin{aligned}
&H_2\big((t+s)_{k+j+1},(t+s)_{k+j}-(t+s)_{k+j+1},v_k',(v+u)_k'-v_k'\big)\\
&\quad\le 2H_2\Big(t+s,\frac{a_T}{2^{2^{k+j}}},v,c_T\Big(1+\frac{2}{K}\Big)\Big),\\
&H_2\big(t_{k+j+1},t_{k+j}-t_{k+j+1},v_k',(v+u)_k'-v_k'\big)\\
&\quad\le 2H_2\Big(t,\frac{a_T}{2^{2^{k+j}}},v,c_T\Big(1+\frac{2}{K}\Big)\Big).
\end{aligned}
$$

从而，对任何 $x>0$ 和 $x_j>0$ 有

$$
\begin{aligned}
&P\Bigg\{\sup_{0\le v\le d_T}\sup_{0\le u\le c_T}\sup_{|t|\le b_T}\sup_{0\le s\le a_T}\\
&\qquad\frac{\Big|X\Big(R\big(t_k,(t+s)_k-t_k,v_k',(v+u)_k'-v_k'\big)\Big)\Big|}{x\big(H_2(t,s,v,u)+H_{21}(t,s,v,u,K)\big)}\ge 1\Bigg\}\\
&\qquad\le 4\cdot 2^{2^{k+2}}\Big(\frac{d_T}{c_T}+1\Big)\Big(\frac{b_T}{a_T}+1\Big)\mathrm{e}^{-x^2/2},
\end{aligned}
\tag{2.6.33}
$$

$$
\begin{aligned}
&P\Bigg\{\Bigg\{\sup_{0\le v\le d_T}\sup_{0\le u\le c_T}\sup_{|t|\le b_T}\sup_{0\le s\le a_T}\Bigg[\sum_{j=0}^{\infty}\Big|X\Big(R\big((t+s)_{k+j+1},(t+s)_{k+j}-\\
&(t+s)_{k+j+1},v_k',(v+u)_k'-v_k'\big)\Big)\Big|\Bigg]\Bigg/\Bigg[2\sum_{j=0}^{\infty}x_jH_2(t+s,a_T/2^{2^{k+j}},v,\\
&c_T(1+1/K))\Bigg]\Bigg\}\ge 1\Bigg\}\le 4\Big(\frac{d_T}{c_T}+1\Big)\Big(\frac{b_T}{c_T}+1\Big)\sum_{j=0}^{\infty}2^{2^{k+1}+2^{k+j+1}}e^{-x_j^2/2},
\end{aligned}
\tag{2.6.34}
$$

$$
\begin{aligned}
&P\Bigg\{\Bigg\{\sup_{0\le v\le d_T}\sup_{0\le u\le c_T}\sup_{|t|\le b_T}\sup_{0\le s\le a_T}\Bigg[\sum_{j=0}^{\infty}\Big|X\Big(R\big(t_{k+j+1},t_{k+j}-t_{k+j+1},\\
&v_k',(v+u)_k'-v_k'\big)\Big)\Big|\Bigg]\Bigg/\Bigg[2\sum_{j=0}^{\infty}x_jH_2(t,a_T/2^{2^{k+j}},v,c_T(1+1/K))\Bigg]\Bigg\}\\
&\ge 1\Bigg\}\le 4\Big(\frac{d_T}{c_T}+1\Big)\Big(\frac{b_T}{a_T}+1\Big)\sum_{j=0}^{\infty}2^{2^{k+1}+2^{k+j+1}}e^{-x_j^2/2}.
\end{aligned}
\tag{2.6.35}
$$

令 $x_j^2=x^2+2^{k+j-2}$, 得

$$\sum_{j=0}^{\infty}2^{2^{k+1}+2^{k+j+1}}e^{-x_j^2/2}\le 2K^2e^{-x^2/2} \tag{2.6.36}$$

考察 $X\big(R(t,s,v,v_k'-v)\big)$ 和 $X\big(R(t,s,v+u,(v+u)_k'-(v+u))\big)$. 对任何 $y>0$ 有

$$P\left\{\sup_{0\le v\le d_T}\sup_{|t|\le b_T}\sup_{0\le s\le a_T}\left|X\big(R(t,s,v,v_k'-v)\big)\right|\ge y\right\}$$

$$\le P\left\{\max_{0\le i\le \frac{d_T}{c_T}K}\sup_{\frac{ic_T}{K}\le v\le\frac{(i+1)c_T}{K}}\sup_{|t|\le b_T}\sup_{0\le s\le a_T}\left|X\big(R(t,s,v,v_k'-v)\big)\right|\ge y\right\}$$

$$\le\sum_{i=0}^{[\frac{d_T}{c_T}K]}\mathrm{P}\left\{\sup_{\frac{ic_T}{K}\le v\le\frac{(i+1)c_T}{K}}\sup_{|t|\le b_T}\sup_{0\le s\le a_T}\left|X\left(R\left(t,s,v,\frac{(i+1)c_T}{K}-vg\right)\right)\right|\ge y\right\}. \tag{2.6.37}$$

令 $d_i=(i+1)c_T/K$. 我们下面证明, 对任何固定的 t,s,

$$P\left\{\sup_{\frac{ic_T}{K}\le v\le\frac{(i+1)c_T}{K}}\frac{\left|X\big(R(t,s,v,d_i-v)\big)\right|}{H_2(t,s,v-\frac{c_T}{K},\frac{2c_T}{K})}\ge y\right\}\le 4\exp(-y^2/2) \tag{2.6.38}$$

对任何 $y>0$ 成立.

设 $Y(v)$ 为一个独立增量过程, 满足 $Y(d_i-v)\overset{\mathcal{D}}{=}X\big(R(t,s,v,d_i-v)\big)$ 对 $ic_T/K\le v\le(i+1)c_T/K$ 成立. 则对任何 $v>v'$ 有

$$\begin{aligned}&EY(d_i-v)Y(d_i-v')\\&\quad=EY^2(d_i-v)=EX^2\big(R(t,s,v,d_i-v)\big)\\&\quad\le EX\big(R(t,s,v,d_i-v)\big)X\big(R(t,s,v',d_i-v')\big),\end{aligned}$$

其中最后一个不等式由 (2.6.28) 得到. 由 (2.6.32) 有

$$H_2\left(t,s,v-\frac{c_T}{K},\frac{2c_T}{K}\right)\ge H_2\left(t,s,\frac{ic_T}{K},\frac{c_T}{K}\right) \tag{2.6.39}$$

对任何 $ic_T/K\le v\le(i+1)c_T/K$ 成立. 由 Slepian 引理和 (2.6.39)

得

$$P\left\{\sup_{ic_T/K\le v\le(i+1)c_T/K}\frac{\left|X\big(R(t,s,v,d_i-v)\big)\right|}{H_2(t,s,v-c_T/K,2c_T/K)}\ge y\right\}$$

$$\le P\left\{\sup_{ic_T/K\le v\le(i+1)c_T/K}\frac{X\big(R(t,s,v,d_i-v)\big)}{H_2(t,s,v-c_T/K,2c_T/K)}\ge y\right\}$$

$$+P\left\{\sup_{ic_T/K\le v\le(i+1)c_T/K}\frac{-X\big(R(t,s,v,d_i-v)\big)}{H_2(t,s,v-c_T/K,2c_T/K)}\ge y\right\}$$

$$\le P\left\{\sup_{ic_T/K\le v\le(i+1)c_T/K}\frac{Y(d_i-v)}{H_2(t,s,v-c_T/K,2c_T/K)}\ge y\right\}$$

$$+P\left\{\sup_{ic_T/K\le v\le(i+1)c_T/K}\frac{-Y(d_i-v)}{H_2(t,s,v-c_T/K,2c_T/K)}\ge y\right\}$$

$$\le 2P\left\{\frac{|Y(d_i-ic_T/K)|}{H_2(t,s,ic_T/K,c_T/K)}\ge y\right\}$$

$$=2P\left\{\frac{X\big(R(t,s,ic_T/K,d_i-ic_T/K)\big)}{H_2(t,s,ic_T/K,c_T/K)}\ge y\right\}$$

$$\le 4\exp(-y^2/2),$$

由此, (2.6.38) 得证.

沿着 (2.6.25)—(2.6.26) 的证明路线, 由 (2.6.38) 我们可得

$$P\left\{\sup_{ic_T/K\le v\le(i+1)c_T/K}\ \sup_{|t|\le b_T}\ \sup_{0\le s\le a_T}\left|X\big(R(t,s,v,d_i-v)\big)\right|/\right.$$

$$\left.\big[xI_1(t,s,v,K)+I_2(t,s,v,K)\big]\ge 1\right\}\le 8\cdot 2^{2^{k+1}}\left(\frac{b_T}{a_T}+1\right)\exp(-x^2/2), \tag{2.6.40}$$

其中

$$\begin{aligned}I_1(t,s,v,K)=&H_2\left(t,s,v-\frac{c_T}{K},\frac{2c_T}{K}\right)\\&+16\sum_{j=0}^{\infty}H_2\left(t,\frac{a_T}{2^{2^{k+j}}},v-\frac{c_T}{K},c_T(1+\frac{1}{K})\right)\\&+16\sum_{j=0}^{\infty}H_2\left(t+s,\frac{a_T}{2^{2^{k+j}}},v-\frac{c_T}{K},c_T(1+\frac{1}{K})\right),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_2(t,s,v,K) =& 40\sum_{j=0}^{\infty} H_2\Big(t, \frac{a_T}{2^{2^{k+j}}}, v-\frac{c_T}{K}, c_T(1+\frac{1}{K})\Big)2^{\frac{k+j+1}{2}} \\
&+\sum_{j=0}^{\infty} H_2\Big(t+s, \frac{a_T}{2^{2^{k+j}}}, v-\frac{c_T}{K}, c_T(1+\frac{1}{K})\Big)2^{\frac{k+j+1}{2}}.
\end{aligned}
$$

综合 (2.6.37) 和 (2.6.40) 得

$$
\begin{aligned}
&P\left\{\sup_{0\le v\le d_T}\sup_{|t|\le b_T}\sup_{0\le s\le a_T}\frac{\big|X\big(R(t,s,v,v_k'-v)\big)\big|}{xI_1(t,s,v,K)+I_2(t,s,v,K)}\ge 1\right\} \\
&\quad\le 16\cdot 2^{2^{k+2}}\Big(\frac{b_T}{a_T}+1\Big)\Big(\frac{d_T}{c_T}+1\Big)\exp(-x^2/2). \qquad (2.6.41)
\end{aligned}
$$

同理，我们有

$$
\begin{aligned}
&P\Big\{\sup_{0\le v\le d_T}\sup_{0\le u\le c_T}\sup_{|t|\le b_T}\sup_{0\le s\le a_T}\Big|X\big(R(t,s,v+u,(v+u)_k' \\
&\quad -(v+u))\big)\Big|\Big/\Big[xI_1(t,s,v+u,K)+I_2(t,s,v+u,K)\Big]\ge 1\Big\} \\
&\quad\le 16\cdot 2^{2^{k+2}}\Big(\frac{b_T}{a_T}+1\Big)\Big(\frac{d_t}{c_T}+1\Big)\exp(-x^2/2). \qquad (2.6.42)
\end{aligned}
$$

综合 (2.6.33)—(2.6.36) 和 (2.6.41)—(2.6.42) 得

$$
\begin{aligned}
&P\Big\{\sup_{0\le v\le d_T}\sup_{0\le u\le c_T}\sup_{|t|\le b_T}\sup_{0\le s\le a_T}\big|X\big(R(t,s,v,v)\big)\big|\Big/\Big\{x\big(H_2(t,s,v,u) \\
&\quad + H_{21}(t,s,v,u,K)\big)+\sum_{j=0}^{\infty}2x_jH_2\Big(t+s,\frac{a_T}{2^{2^{k+j}}},v,c_T\Big(1+\frac{2}{K}\Big)\Big) \\
&\quad +\sum_{j=0}^{\infty}2x_jH_2\Big(t,\frac{a_T}{2^{2^{k+j}}},v,c_T\Big(1+\frac{2}{K}\Big)\Big)+xI_1(t,s,v,K) \\
&\qquad + I_2(t,s,v,K)+xI_1(t,s,v+u,K)+I_2(t,s,v+u,K)\Big\}\ge 1\Big\} \\
&\le 52\cdot 2^{2^{k+2}}\Big(\frac{b_T}{a_T}+1\Big)\Big(\frac{d_T}{c_T}+1\Big)\exp(-x^2/2). \qquad (2.6.43)
\end{aligned}
$$

沿着 (2.6.26) 的证明路线，由 (2.6.29) 我们可以证明对充分大的 k 和任何 $x \geq 1$ 有

$$
\begin{aligned}
& x\big(H_2(t,s,v,u) + H_{21}(t,s,v,u,K)\big) \\
& \quad + \sum_{j=0}^{\infty} 2x_j H_2\Big(t+s, \frac{a_T}{2^{2^{k+j}}}, v, c_T\Big(1+\frac{2}{K}\Big)\Big) \\
& \quad + \sum_{j=0}^{\infty} 2x_j H_2\Big(t, \frac{a_T}{2^{2^{k+j}}}, v, c_T\Big(1+\frac{2}{K}\Big)\Big) + xI_1(t,s,v,K) \\
& \quad + I_2(t,s,v,K) + xI_1(t,s,v+u,K) + I_2(t,s,v+u,K) \\
& \leq (1+\varepsilon)x\Big\{H_2(t,a_T,v,c_T(1+\varepsilon)) + 3H_2(t,a_T,v-\varepsilon c_T, 2\varepsilon c_T) \\
& \quad + 3H_2(t,a_T,v+u-\varepsilon c_T, 2\varepsilon c_T) + H_2(t,\varepsilon a_T, v-\varepsilon c_T, c_T(1+\varepsilon)) \\
& \quad + H_2(t,\varepsilon a_T, v+u-\varepsilon c_T, c_T(1+\varepsilon)) \\
& \quad + H_2(t+s,\varepsilon a_T, v-\varepsilon a_T, c_T(1+\varepsilon)) \\
& \quad + H_2(t+s,\varepsilon a_T, v+u-\varepsilon a_T, c_T(1+\varepsilon)),
\end{aligned} \tag{2.6.44}
$$

从而由 (2.6.43) 和 (2.6.44), (2.6.30) 得证.

类似地，可以证明

命题 2.6.3 设 $A \in \mathcal{R}_+$, $a_0 > 0$, $c_0 > 0$. 假设 $H_2(t,s,v,u)$ 对 s 和 u 非降，对任何 $t, s, a \geq v \geq v' > 0$,

$$
\begin{aligned}
& EX\big(R(t,s,v',a-v')\big)X\big(R(t,s,v,a-v)\big) \\
& \qquad \geq EX^2\big(R(t,s,v,a-v)\big)
\end{aligned}
$$

成立，并且存在正数 c_1 和 α, 使得对任何 $T \in A$, $0 \leq s \leq s_1 \leq a_0$, $0 \leq v \leq d_T + c_0$, $0 \leq u \leq 2c_0$, $|t| \leq b_T$ 成立

$$
\frac{H_2(t,s,v,u)}{s^\alpha} \leq c_1 \frac{H_2(t,s_1,v,u)}{s_1^\alpha}.
$$

则对任意的 $0 < \varepsilon < 1$, 存在只依赖于 ε, c_1, α 的常数 $C(\varepsilon)$, 使得

对任何 $x \geq 1$ 有

$$
\begin{aligned}
&P\Big\{\sup_{T\in A}\sup_{0\le v\le d_T}\sup_{0\le u\le c_0}\sup_{0\le s\le b_T}\sup_{|t|\le a_0}|X\big(R(t,s,v,u)\big)|/\\
&\big\{H_2(t,a_0,v,c_0(1+\varepsilon))+3H_2(t,a_0,v-\varepsilon c_0,2\varepsilon c_0)\\
&+3H_2(t,a_0,v+u-\varepsilon c_0,2\varepsilon c_0)+H_2(t,\varepsilon a_0,v-\varepsilon c_0,c_0(1+\varepsilon))\\
&+H_2(t,\varepsilon a_0,v+u-\varepsilon c_0,c_0(1+\varepsilon))\\
&+H_2(t+s,\varepsilon a_0,v-\varepsilon a_0,c_0(1+\varepsilon))\\
&+H_2(t+s,\varepsilon a_0,v+u-\varepsilon a_0,c_0(1+\varepsilon))\big\}\geq(1+\varepsilon)x\Big\}\\
&\leq C(\varepsilon)\sup_{T\in A}\Big(\frac{d_T}{c_0}+1\Big)\Big(\frac{b_T}{a_0}+1\Big)e^{-x^2/2}.
\end{aligned}
$$

2.6.2 样本轨道性质

我们现在利用关于 (2.6.6) 所定义的过程 $X(t,v)$ 的大偏差结果，证明它的一些样本轨道性质.

定理 2.6.1 设 $H_1(t,s,T)=H_1(0,s,T)=:H_0(s,T)$ $(\forall s>0,|t|\leq b_T+a_T)$, 对任何 $v\geq u$ 和 t,s 成立

$$
\begin{aligned}
&E\big(X(t+s,v)-X(t,v)\big)\big(X(t+s,u)-X(t,u)\big)\\
&\quad\geq E\big(X(t+s,u)-X(t,u)\big)^2,
\end{aligned}
\tag{2.6.45}
$$

并且存在正数 c_0 和 α 使得对任何 $0\leq s\leq s_1\leq a_T$ 成立

$$
\frac{H_0(s,T)}{s^\alpha}\leq c_0\frac{H_0(s_1,T)}{s_1^\alpha}. \tag{2.6.46}
$$

进一步假设

$$
\log\log\Big(a_T+\frac{1}{b_T}\Big)=o\Big(\log\frac{b_T}{a_T}\Big),\quad T\to\infty, \tag{2.6.47}
$$

$$
\log\log\Big(H_0(a_T,T)+\frac{1}{H_0(a_T,T)}\Big)=o\Big(\log\frac{b_T}{a_T}\Big),\quad T\to\infty \tag{2.6.48}
$$

且对任何 $j \neq l$, $s > 0$ 有

$$E\big(X((j+1)s,v)-X(js,v)\big)\big(X((l+1)s,v)-X(ls,v)\big) \le 0. \quad (2.6.49)$$

则有

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{0\le t\le b_T} \frac{|X(t+a_T,T)-X(t,T)|}{H_0(a_T,T)(2\log(b_T/a_T))^{1/2}} = 1 \quad \text{a.s.}, \qquad (2.6.50)$$

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{|t|\le b_T} \sup_{0\le s\le a_T} \frac{|X(t+s,T)-X(t,T)|}{H_0(a_T,T)(2\log(b_T/a_T))^{1/2}} = 1 \quad \text{a.s.} \quad (2.6.51)$$

证明 首先证明

$$\limsup_{T\to\infty} \sup_{|t|\le b_T} \sup_{0\le s\le a_T} \frac{|X(t+s,T)-X(t,T)|}{H_0(a_T,T)(2\log(b_T/a_T))^{1/2}} \le 1 \quad \text{a.s.} \qquad (2.6.52)$$

对任意的 $0<\varepsilon<1/2$, 由 (2.6.46) 存在常数 N 使得

$$\frac{H_0(a_T/N,T)}{H_0(a_T,T)} \le \varepsilon. \qquad (2.6.53)$$

令 $1<\theta<\min(1+\frac{1}{N},1+\frac{\varepsilon^2}{38})$. 记

$$A_i = \{T: \theta^i < a_T \le \theta^{i+1}\}, \quad -\infty<i<\infty,$$

$$B_j = \{T: \theta^j < 1+b_T/a_T \le \theta^{j+1}\}, \quad j=0,1,2,\cdots,$$

$$C_{ki} = \{T: \theta^k < H_0(\theta^{i+1},T) \le \theta^{k+1}\}, \quad -\infty<k<\infty.$$

显然, 由 (2.6.47) 有: 当 $T\to\infty$ 时, $b_T/a_T\to\infty$, 且对充分大的 j, 当 $|i|\ge\theta^{\varepsilon j}$ 时, $A_iB_j=\emptyset$. 同样, 由 (2.6.48) 我们有: 对充分大的 j, 当 $|k|\ge\theta^{\varepsilon j}$ 时, $A_iB_jC_{ki}=\emptyset$. 令 $T'_{kij}=\inf\{T: T\in A_iB_jC_{ki}\}$

和 $T^*_{kij} = \sup\{T : T \in A_i B_j C_{ki}\}$. 从而

$$\limsup_{T\to\infty} \sup_{|t|\le b_T} \sup_{0\le s\le a_T} \frac{|X(t+s,T) - X(t,T)|}{H_0(a_T,T)(2\log\frac{b_T}{a_T})^{1/2}}$$

$$\le \limsup_{j\to\infty} \sup_{T\in B_j} \sup_{|t|\le b_T} \sup_{0\le s\le a_T} \frac{|X(t+s,T) - X(t,T)|}{H_0(a_T,T)(2\log\frac{b_T}{a_T})^{1/2}}$$

$$\le \limsup_{j\to\infty} \max_{|i|\le\theta^{\varepsilon j}} \sup_{T\in B_j A_i} \sup_{|t|\le b_T} \sup_{0\le s\le a_T} \frac{|X(t+s,T) - X(t,T)|}{H_0(a_T,T)(2\log\frac{b_T}{a_T})^{1/2}}$$

$$\le \limsup_{j\to\infty} \max_{|i|\le\theta^{\varepsilon j}} \sup_{T\in B_j A_i} \sup_{|t|\le b_T} \sup_{0\le s\le\theta^{i+1}} \frac{(1+\varepsilon)|X(t+s,T) - X(t,T)|}{H_0(\theta^{i+1},T)(2\log\theta^j)^{1/2}}$$

$$\le \limsup_{j\to\infty} \max_{|i|\le\theta^{\varepsilon j}} \max_{|k|\le\theta^{\varepsilon j}} \sup_{T\in B_j A_i C_{ki}} \sup_{|t|\le b_T} \sup_{0\le s\le\theta^{i+1}} (1+\varepsilon)|X(t+s,T)$$

$$- X(t,T)|\Big/\Big[H_0(\theta^{i+1},T'_{kij})(2\log\theta^j)^{1/2}\Big]$$

$$\le \limsup_{j\to\infty} \max_{|i|\le\theta^{\varepsilon j}} \max_{|k|\le\theta^{\varepsilon j}} \sup_{T\in B_j A_i C_{ki}} \sup_{|t|\le b_T} \sup_{0\le s\le\theta^{i+1}} (1+\varepsilon)^2|X(t+s,T)$$

$$- X(t,T)|\Big/\Big[H_0(\theta^{i+1},T^*_{kij})(2\log\theta^j)^{1/2}\Big]. \tag{2.6.54}$$

由命题 2.6.1 和 (2.6.53), 并注意到 $H_1(t,s,T) = H_0(s,T)$, 我们得

$$P\Big\{\sup_{T\in B_j A_i C_{ki}} \sup_{|t|\le b_T} \sup_{0\le s\le\theta^{i+1}} |X(t+s) - X(t,T)|\Big/$$

$$\Big[H_0(\theta^{i+1},T^*_{kij})(2\log\theta^j)^{1/2}\Big] \ge (1+2\varepsilon)^4\Big\}$$

$$\le C(\varepsilon) \sup_{T\in B_j A_i C_{ki}} \Big(\frac{b_T}{\theta^{i+1}} + 1\Big) \exp\big(-(1+2\varepsilon)^2 \log\theta^j\big)$$

$$\le C(\varepsilon)\theta^{-4\varepsilon j}. \tag{2.6.55}$$

从而

$$P\Big\{\max_{|i|\le\theta^{\varepsilon j}} \max_{|k|\le\theta^{\varepsilon j}} \sup_{T\in B_j A_i C_{ki}} \sup_{|t|\le b_T} \sup_{0\le s\le\theta^{i+1}} \frac{|X(t+s,T) - X(t,T)|}{H_0(\theta^{i+1},T^*_{kij})(2\log\theta^j)^{1/2}}$$

$$\ge (1+2\varepsilon)^4\Big\} \le C(\varepsilon)\theta^{-\varepsilon j}. \tag{2.6.56}$$

由 (2.6.54), (2.6.56) 和 Borel-Cantelli 引理得

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{|t|\le b_T}\sup_{0\le s\le a_T}\frac{|X(t+s,T)-X(t,T)|}{H_0(a_T,T)(2\log(b_T/a_T))^{1/2}}\le(1+2\varepsilon)^6\quad\text{a.s.}\tag{2.6.57}$$

由 ε 的任意性, (2.6.53) 得证.

下面证明

$$\liminf_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le b_T}\frac{|X(t+a_T,T)-X(t,T)|}{H_0(a_T,T)(2\log(b_T/a_T))^{1/2}}\ge 1\quad\text{a.s.}\tag{2.6.58}$$

注意到

$$\begin{aligned}
&\liminf_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le b_T}\frac{|X(t+a_T,T)-X(t,T)|}{H_0(a_T,T)(2\log(b_Ta_T))^{1/2}}\\
\ge&\liminf_{j\to\infty}\inf_{|i|\le\theta^{\varepsilon j}}\inf_{T\in B_jA_i}\sup_{0\le t\le b_T}\frac{|X(t+a_T,T)-X(t,T)|}{H_0(a_T,T)(2\log(b_T/a_T))^{1/2}}\\
\ge&\liminf_{j\to\infty}\inf_{|i|\le\theta^{\varepsilon j}}\inf_{T\in B_jA_i}\sup_{0\le t\le b_T}\frac{|X(t+\theta^{i+1},T)-X(t,T)|}{(1+\varepsilon)H_0(\theta^{i+1},T)(2\log\theta^j)^{1/2}}\\
&-\limsup_{j\to\infty}\sup_{|i|\le\theta^{\varepsilon j}}\sup_{T\in B_jA_i}\sup_{0\le t\le b_T}\frac{|X(t+\theta^{i+1},T)-X(t+a_T,T)|}{H_0(\theta^{i+1},T)(2\log\theta^j)^{1/2}}\\
\ge&\liminf_{j\to\infty}\inf_{|i|\le\theta^{\varepsilon j}}\inf_{T\in B_jA_i}\sup_{0\le l\le\theta^{j-2}}\frac{|X((l+1)\theta^{i+1},T)-X(l\theta^{i+1},T)|}{(1+\varepsilon)H_0(\theta^{i+1},T)(2\log\theta^j)^{1/2}}\\
&-\limsup_{j\to\infty}\sup_{|i|\le\theta^{\varepsilon j}}\sup_{T\in B_jA_i}\sup_{a_T\le t\le b_T+a_T}\sup_{0\le s\le(\theta-1)\theta^i}\\
&\qquad\frac{|X(t+s,T)-X(t,T)|}{H_0(\theta^{i+1},T)(2\log\theta^j)^{1/2}}.
\end{aligned}\tag{2.6.59}$$

沿着 (2.6.57) 的证明路线, 由 (2.6.46) 我们可以证明

$$\begin{aligned}
&\limsup_{j\to\infty}\sup_{|i|\le\theta^{\varepsilon i}}\sup_{T\in B_jA_i}\sup_{a_T\le t\le b_T+a_T}\sup_{0\le s\le(\theta-1)\theta^i}\frac{|X(t+s,T)-X(t,T)|}{H_0(\theta^{i+1},T)(2\log\theta^j)^{1/2}}\\
\le&\limsup_{j\to\infty}\sup_{|i|\le\theta^{\varepsilon j}}\sup_{T\in B_jA_i}\sup_{a_T\le t\le b_T+a_T}\sup_{0\le s\le(\theta-1)\theta^i}\\
&\cdot\frac{\varepsilon|X(t+s,T)-X(t,T)|}{H_0((\theta-1)\theta^i,T)(2\log\theta^j)^{1/2}}\le\varepsilon\quad\text{a.s.}
\end{aligned}\tag{2.6.60}$$

记 $Y(l,T)=X((l+1)\theta^{i+1},T)-X(l\theta^{i+1},T)$. 令 $Z(l,T)$ 为一个两参数 Gauss 过程，满足：对每个固定的 l, $Z(l,T)$ 是独立增量过程且 $Z(l,T)\overset{\mathcal{D}}{=}Y(l,T)$. $EZ(l,T)Z(n,T')=EY(l,T)Y(n,T')$ $(l\neq n)$. 则由 (2.6.45) 有

$$
\begin{aligned}
EY^2(l,T)&=EZ^2(l,T),\\
EY(l,T)Y(n,T)&=EZ(l,T)Z(n,T),\\
EY(l,T)Y(n,T')&=EZ(l,T)Z(n,T'),\quad \forall l\neq n,\\
EY(l,T)Y(l,T')&\geq EY^2(l,T\wedge T')=EZ(l,T)Z(l,T').
\end{aligned}
$$

从而，应用推论 1.2.2 得

$$
\begin{aligned}
&P\Big\{\inf_{T\in B_jA_i}\max_{0\leq l\leq\theta^{j-2}}\frac{Y(l,T)}{H_0(\theta^{i+1},T)(2\log\theta^j)^{1/2}}\leq\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\Big\}\\
&=1-P\Big\{\bigcap_{T\in B_jA_i}\bigcup_{0\leq l\leq\theta^{j-2}}\Big\{\frac{Y(l,T)}{H_0(\theta^{i+1},T)(2\log\theta^j)^{1/2}}\geq\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\Big\}\Big\}\\
&\leq 1-P\Big\{\bigcap_{T\in B_jA_i}\bigcup_{0\leq l\leq\theta^{j-2}}\Big\{\frac{Z(l,T)}{H_0(\theta^{i+1},T)(2\log\theta^j)^{1/2}}\geq\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\Big\}\Big\}\\
&=P\Big\{\inf_{T\in B_jA_i}\max_{0\leq l\leq\theta^{j-2}}\frac{Z(l,T)}{H_0(\theta^{i+1},T)(2\log\theta^j)^{1/2}}\leq\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\Big\}.
\end{aligned}\tag{2.6.61}
$$

由 (2.6.48) 易知，对充分大的 j, 当 $|k|\geq\theta^j$ 时， $C_{ki}B_j=\emptyset$. 从而

$$
\begin{aligned}
&P\Big\{\inf_{T\in B_jA_i}\max_{0\leq l\leq\theta^{j-2}}\frac{Z(l,T)}{H_0(\theta^{i+1},T)(2\log\theta^j)^{1/2}}\leq\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\Big\}\\
&\leq\sum_{|k|\leq\theta^j}P\Big\{\inf_{T\in B_jA_iC_{ki}}\max_{0\leq l\leq\theta^{j-2}}\frac{Z(l,T)}{H_0(\theta^{i+1},T)(2\log\theta^j)^{1/2}}\leq\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\Big\}\\
&\leq\sum_{|k|\leq\theta^j}P\Big\{\max_{0\leq l\leq\theta^{j-2}}\frac{Z(l,T^*_{kij})}{H_0(\theta^{i+1},T^*_{kij})(2\log\theta^j)^{1/2}}\leq\frac{\theta}{(1+\varepsilon)^2}\Big\}\\
&\quad+\sum_{|k|\leq\theta^j}P\Big\{\max_{0\leq l\leq\theta^{j-2}}\sup_{T\in B_jA_iC_{ki}}\frac{|Z(l,T^*_{kij})-Z(l,T)|}{H_0(\theta^{i+1},T^*_{kij})(2\log\theta^j)^{1/2}}\\
&\qquad\qquad\geq\frac{\theta\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}\Big\}.
\end{aligned}\tag{2.6.62}
$$

注意到对固定的 l, $Z(l,T)$ 为独立增量过程，我们有

$$\begin{aligned}E\big(Z(l,T^*_{kij})-Z(l,T'_{kij})\big)^2&=EZ^2(l,T^*_{kij})-EZ^2(l,T'_{kij})\\&=EY^2(l,T^*_{kij})-EY^2(l,T'_{kij})\le\theta^{2(k+1)}-\theta^{2k}\\&\le(\theta^2-1)EY^2(l,T^*_{kij})=(\theta^2-1)H_0^2(\theta^{i+1},T^*_{kij}).\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&\sum_{|k|\le\theta^j}P\Big\{\max_{0\le l\le\theta^{j-2}}\sup_{T\in B_jA_iC_{ki}}\frac{|Z(l,T^*_{kij})-Z(l,T)|}{H_0(\theta^{i+1},T^*_{kij})(2\log\theta^j)^{1/2}}\ge\frac{\theta\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}\Big\}\\&\le\sum_{|k|\le\theta^j}\sum_{l=0}^{\theta^{j-2}}P\Big\{\sup_{T\in B_jA_iC_{ki}}\frac{|Z(l,T^*_{kij})-Z(l,T)|}{H_0(\theta^{i+1},T^*_{kij})(2\log\theta^j)^{1/2}}\ge\frac{\varepsilon}{2}\Big\}\\&\le2\sum_{|k|\le\theta^j}\sum_{l=0}^{\theta^{j-2}}P\Big\{\frac{|Z(l,T^*_{kij})-Z(l,T'_{kij})|}{H_0(\theta^{i+1},T^*_{kij})(2\log\theta^j)^{1/2}}\ge\frac{\varepsilon}{2}\Big\}\\&\le4\sum_{|k|\le\theta^j}\sum_{l=0}^{\theta^{j-2}}\exp\Big(-\frac{\varepsilon^2\log\theta^j}{4(\theta^2-1)}\Big)\le4\theta^{-2j}.\end{aligned}\tag{2.6.63}$$

这里用到了条件 $1<\theta<1+\varepsilon/32$. 由 (2.6.49) 和 Slepian 引理得

$$\begin{aligned}&P\Big\{\max_{0\le l\le\theta^{j-2}}\frac{Z(l,T^*_{kij})}{H_0(\theta^{i+1},T^*_{kij})(2\log\theta^j)^{1/2}}\le\frac{\theta}{(1+\varepsilon)^2}\Big\}\\&\le\prod_{l=0}^{[\theta^{j-2}]}P\Big\{\frac{Z(l,T^*_{kij})}{H_0(\theta^{i+1},T^*_{kij})(2\log\theta^j)^{1/2}}\le\frac{\theta}{(1+\varepsilon)^2}\Big\}\\&\le\prod_{j=0}^{[\theta^{j-2}]}\Big(1-\exp\Big(-\frac{\theta^2}{1+\varepsilon}\log\theta^j\Big)\Big)\\&\le\exp\big(-\theta^{\varepsilon j/4}\big)\le\theta^{-4j}.\end{aligned}\tag{2.6.64}$$

从而，由 (2.6.61)—(2.6.64), 对充分大的 j

$$P\Big\{\inf_{T\in B_jA_i}\max_{0\le l\le\theta^{j-2}}\frac{Y(l,T)}{H_0(\theta^{i+1},T)(2\log\theta^j)^{1/2}}\le\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\Big\}\le5\theta^{-2j}.\tag{2.6.65}$$

综合 (2.6.59), (2.6.60) 和 (2.6.65), 由 Borel-Cantelli 引理得

$$\liminf_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le b_T}\frac{|X(t+a_T,T)-X(t,T)|}{H_0(a_T,T)(2\log(b_T/a_T))^{1/2}}\ge\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}-\varepsilon\quad\text{a.s.}\tag{2.6.66}$$

由 ε 的任意性, 得证 (2.6.58), 从而定理 2.6.1 得证.

定理 2.6.2 设条件 (2.6.28) 满足并且对任何 $0\le s\le s_1\le a_T$, $0\le v\le d_T$,$0\le u\le 2c_T$, $|t|\le b_T+a_T$, (2.6.29) 成立. 假设

$$\lim_{\delta\to0}\lim_{T\to\infty}\sup_{|t|\le b_T+a_T}\sup_{0\le s\le a_T}\sup_{0\le v\le d_T+c_T}\sup_{-\delta c_T\le u\le c_T}\frac{H_2(t+s,a_T,v+u,\delta c_T)+H_2(t+s,\delta a_T,v+u,c_T)}{H_2(t,a_T,v,c_T)}=0,\tag{2.6.67}$$

$$\log\log\left(a_T+c_T+\frac{1}{d_T}+\frac{1}{b_T}\right)=o\Big(\log\left(\frac{b_T}{a_T}+1\right)\left(1+\frac{d_T}{c_T}\right)\Big),\quad T\to\infty.\tag{2.6.68}$$

则

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\le v\le d_T}\sup_{0\le u\le c_T}\sup_{|t|\le b_T}\sup_{0\le s\le a_T}\big|X\big(R(t,s,v,u)\big)\big|\Big/H_2(t,a_T,v,c_T)\cdot\Big(2\Big(\log\left(\frac{b_T}{a_T}+1\right)\left(1+\frac{d_T}{c_T}\right)+\log\log\tilde H_2(t,a_T,v,c_T)\Big)\Big)^{1/2}\le1\quad\text{a.s.}\tag{2.6.69}$$

这里以及在本节的余下部分中, $\tilde{x}=x+1/x$. 如果进一步还有下面的条件成立: 当 $T\to\infty$ 时, 对 $|t|\le b_T$ 和 $0\le v\le d_T$ 一致成立

$$\log\log\tilde H_2(t,a_T,v,c_T)=o\Big(\log\big(b_T/a_T+1\big)\big(1+d_T/c_T\big)\Big),\tag{2.6.70}$$

且对任何 $s>0$, $u>0$, $j+k\ne m+l$ 成立

$$EX\big(R(js,s,ku,u)\big)X\big(R(ms,s,lu,u)\big)\le0,\tag{2.6.71}$$

则

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le v\le d_T}\sup_{0\le t\le b_T}\frac{\big|X\big(R(t,a_T,v,c_T)\big)\big|}{H_2(t,a_T,v,c_T)\big(2\log(b_T/a_T+1)(d_T/c_T+1)\big)^{1/2}}=1\quad\text{a.s.},\tag{2.6.72}$$

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{\substack{0\le v\le d_T\\0\le u\le c_T}}\sup_{\substack{0\le t\le b_T\\0\le s\le a_T}}\frac{\left|X\big(R(t,s,v,u)\big)\right|}{H_2(t,s,v,u)\big(2\log(b_T/a_T+1)(d_T/c_T+1)\big)^{1/2}}$$

$$=1\quad\text{a.s.}\tag{2.6.73}$$

证明 对任意的 $0<\varepsilon<1/2$, 由 (2.6.67), 存在正数 N 使得对 $T\ge N$ 有

$$\sup_{\substack{|t|\le b_T+a_T\\0\le s\le a_T}}\sup_{\substack{0\le v\le d_T+c_T\\-c_T/N\le u\le c_T}}\big[H_2(t+s,a_T,v+u,c_T/N)$$

$$+H_2(t+s,a_T/N,v+u,c_T)\big]/H_2(t,a_T,v,c_T)\le\varepsilon.\tag{2.6.74}$$

令 $1<\theta<1+1/N$. 记

$$A_k=\{T:\theta^k<a_T\le\theta^{k+1}\},\quad -\infty<k<\infty,$$

$$B_i=\{T:\theta^i<c_T\le\theta^{i+1}\},\quad -\infty<i<\infty,$$

$$G_j=\Big\{T:\theta^j<\Big(\frac{b_T}{a_T}+1\Big)\Big(\frac{d_T}{c_T}+1\Big)\le\theta^{j+1}\Big\},\quad j=0,1,2,\cdots.$$

显然, 由 (2.6.68) 有

$$\Big(\frac{b_T}{a_T}+1\Big)\Big(\frac{d_T}{c_T}+1\Big)\to\infty,\quad T\to\infty,$$

并且对充分大的 j, 当 $|k|\ge\theta^{\varepsilon j}$ 时有 $A_kG_j=\emptyset$ 和 $B_kG_j=\emptyset$. 从而

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\le v\le d_T}\sup_{0\le u\le c_T}\sup_{|t|\le b_T}\sup_{0\le s\le a_T}\left|X\big(R(t,s,v,u)\big)\right|/$$

$$\cdot H_2(t,a_T,v,c_T)\big(2(\log(\frac{b_T}{a_T}+1)(\frac{d_T}{c_T}+1)+\log\log\tilde H_2(t,a_T,v,c_T))\big)^{1/2}$$

$$\le\limsup_{j\to\infty}\sup_{|k|,|i|\le\theta^{\varepsilon j}}\sup_{T\in A_kB_iG_j}\sup_{0\le v\le d_T}\sup_{0\le u\le c_T}\sup_{|t|\le b_T}\sup_{0\le s\le a_T}\big|X\big(R(t,s,$$

$$v,u)\big)\big|/\cdot H_2(t,a_T,v,c_T)\big(2(\log(\frac{b_T}{a_T}+1)(\frac{d_T}{c_T}+1)$$

$$+\log\log\tilde H_2(t,a_T,v,c_T))\big)^{1/2}$$

$$\le\limsup_{j\to\infty}\sup_{|k|,|i|\le\theta^{\varepsilon j}}\sup_{T\in A_kB_iG_j}\sup_{0\le v\le d_T}\sup_{0\le u\le\theta^{i+1}}\sup_{|t|\le b_T}\sup_{0\le s\le\theta^{k+1}}$$

$$\frac{(1+\varepsilon)\big|X\big(R(t,s,v,u)\big)\big|}{H_2(t,\theta^{k+1},v,\theta^{i+1})\big(2(\log\theta^j+\log\log\tilde H_2(t,\theta^{k+1},v,\theta^{i+1}))\big)^{1/2}}.$$

(2.6.75)

由 (2.6.74) 和命题 2.6.2 得

$$P\Big\{\sup_{|k|,|i|\le\theta^{\varepsilon j}}\sup_{T\in A_kB_iG_j}\sup_{0\le v\le d_T}\sup_{0\le u\le\theta^{i+1}}\sup_{|t|\le b_T}\sup_{0\le s\le\theta^{k+1}}\big|X\big(R(t,s,v,u)\big)\big|/$$

$$\big[H_2(t,\theta^{k+1},v,\theta^{i+1})\big(2(\log\theta^j+\log\log\tilde H_2(t,\theta^{k+1},v,\theta^{i+1}))\big)^{1/2}\big]\ge(1+\varepsilon)^4\Big\}$$

$$\le C(\varepsilon)\sum_{|k|,|i|\le\theta^{\varepsilon j}}\sup_{T\in A_kB_iG_j}\big(d_T/\theta^{i+1}+1\big)\big(b_T/\theta^{k+1}+1\big)$$

$$\cdot\exp\big(-(1+\varepsilon)^2\log\theta^j\big)$$

$$\le C(\varepsilon)\sum_{|k|,|i|\le\theta^{\varepsilon j}}\theta^j\exp\big(-(1+\varepsilon)^2\log\theta^j\big)\le C(\varepsilon)\theta^{-\varepsilon^2 j}. \qquad (2.6.76)$$

由 (2.6.75), (2.6.76) 和 Borel-Cantelli 引理得

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\le v\le d_T}\sup_{0\le u\le c_T}\sup_{|t|\le b_T}\sup_{0\le s\le a_T}\big|X\big(R(t,s,v,u)\big)\big|/$$

$$\cdot H_2(t,a_T,v,c_T)\big(2(\log(\frac{b_T}{a_T}+1)(1+\frac{d_T}{c_T})+\log\log\tilde H_2(t,a_T,v,c_T))\big)^{1/2}$$

$$\le(1+\varepsilon)^5\quad\text{a.s.}$$

由此和 ε 的任意性, (2.6.69) 得证.

现在考察 (2.6.72). 注意到

$$\liminf_{T\to\infty}\sup_{0\le v\le d_T}\sup_{0<t\le b_T}\frac{\big|X\big(R(t,a_T,v,c_T)\big)\big|}{H_2(t,a_T,v,c_T)\big(2\log(\frac{b_T}{a_T}+1)(\frac{d_T}{c_T}+1)\big)^{1/2}}$$

$$\ge\liminf_{j\to\infty}\inf_{|k|,|i|\le\theta^{\varepsilon j}}\inf_{T\in A_kB_iG_j}\sup_{\substack{0\le v\le d_T\\0<t\le b_T}}\big|X\big(R(t,a_T,v,c_T)\big)\big|/$$

$$\big[H_2(t,a_T,v,c_T)\big(2\log(\frac{b_T}{a_T}+1)(\frac{d_T}{c_T}+1)\big)^{1/2}\big]$$

$$\ge\liminf_{j\to\infty}\inf_{|k|,|i|\le\theta^{\varepsilon j}}\inf_{T\in A_kB_iG_j}\sup_{\substack{0\le v\le d_T\\0<t\le b_T}}\big|X\big(R(t,\theta^{k+1},v,\theta^{i+1})\big)\big|/$$

$$\big[(1+\varepsilon)H_2(t,\theta^{k+1},v,\theta^{i+1})(2\log\theta^j)^{1/2}\big]$$

$$-\limsup_{j\to\infty}\sup_{|k|,|i|\le\theta^{\varepsilon j}}\sup_{T\in A_kB_iG_j}\sup_{\theta^i\le v\le\theta^i+d_T}\sup_{0\le u\le(\theta-1)\theta^i}\sup_{0<t\le b_T}\sup_{0\le s\le\theta^{k+1}}$$

$$\frac{\left|X\big(R(t,s,v,u)\big)\right|}{H_2(t,\theta^{k+1},v-\theta^i,\theta^{i+1})(2\log\theta^j)^{1/2}}$$

$$-\limsup_{j\to\infty}\sup_{|k|,|i|\le\theta^{\varepsilon j}}\sup_{T\in A_kB_iG_j}\sup_{0\le v\le d_T}\sup_{0\le u\le\theta^{i+1}}\sup_{\theta^k\le t\le\theta^k+b_T}\sup_{0\le s\le(\theta-1)\theta^k}$$

$$\frac{\left|X\big(R(t,s,v,u)\big)\right|}{H_2(t-\theta^k,\theta^{k+1},v,\theta^{i+1})(2\log\theta^j)^{1/2}}$$

$$\ge\liminf_{j\to\infty}\inf_{|k|,|i|\le\theta^{\varepsilon j}}\min_{m\cdot n\ge\theta^j}\max_{\substack{0\le l\le m\\0\le p\le n}}\left[\left|X\big(R(l\theta^{k+1},\theta^{k+1},p\theta^{i+1},\theta^{i+1})\big)\right|\right]/$$

$$\left[(1+\varepsilon)H_2(l\theta^{k+1},\theta^{k+1},p\theta^{i+1},\theta^{i+1})(2\log\theta^j)^{1/2}\right]$$

$$-\varepsilon\limsup_{j\to\infty}\sup_{|k|,|i|\le\theta^{\varepsilon j}}\sup_{T\in A_kB_iG_j}\sup_{0\le v\le\theta^i+d_T}\sup_{0\le u\le(\theta-1)\theta^i}\sup_{0<t\le b_T}\sup_{0\le s\le\theta^{k+1}}$$

$$\frac{\left|X\big(R(t,s,v,u)\big)\right|}{H_2(t,\theta^{k+1},v,(\theta-1)\theta^i)(2\log\theta^j)^{1/2}}$$

$$-\varepsilon\limsup_{j\to\infty}\sup_{|k|,|i|\le\theta^{\varepsilon j}}\sup_{T\in A_kB_iG_j}\sup_{0\le v\le d_T}\sup_{0\le u\le\theta^{i+1}}\sup_{0\le t\le\theta^k+b_T}\sup_{0\le s\le(\theta-1)\theta^k}$$

$$\frac{\left|X\big(R(t,s,v,u)\big)\right|}{H_2(t,(\theta-1)\theta^k,v,\theta^{i+1})(2\log\theta^j)^{1/2}}$$

$$=:I_1-I_2-I_3. \tag{2.6.77}$$

沿着 (2.6.69) 的证明路线，由 (2.6.70) 可以证明

$$I_2+I_3\le 2\varepsilon\quad\text{a.s.} \tag{2.6.78}$$

对 I_1, 注意到 (2.6.71), 利用 Slepian 引理可以得到：对充分大的 j 有

$$P\Big\{\min_{mn\ge\theta^j}\max_{0\le l\le m}\max_{0\le p\le n}X\big(R(l\theta^{k+1},\theta^{k+1},p\theta^{i+1},\theta^{i+1})\big)/$$

$$\left[H_2(l\theta^{k+1},\theta^{k+1},p\theta^{i+1},\theta^{i+1})(2\log\theta^j)^{1/2}\right]\le\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\Big\}$$

$$\le\sum_{mn\ge\theta^j}\prod_{0\le l\le m}\prod_{0\le p\le n}P\Big\{X\big(R(l\theta^{k+1},\theta^{k+1},p\theta^{i+1},\theta^{i+1})\big)/$$

$$\left[H_2(l\theta^{k+1},\theta^{k+1},p\theta^{i+1},\theta^{i+1})(2\log\theta^j)^{1/2}\right]\le\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\Big\}$$

$$\le\sum_{m,n:mn\ge\theta^j}\left(1-\exp\left(-\frac{\log\theta^j}{(1+\varepsilon)^2}\right)\right)^{(m+1)(n+1)}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \sum_{m,n:mn\ge\theta^j} \exp\Big(-(m+1)(n+1)\theta^{-j/(1+\varepsilon)^2}\Big) \\
&\le \theta^{2j}\exp(-\theta^{j\varepsilon}) \le \theta^{-j}.
\end{aligned}
$$

由此和 Borel-Cantelli 引理得

$$
I_1 \ge \frac{1}{(1+\varepsilon)^3} \quad \text{a.s.} \tag{2.6.79}
$$

由上述这些不等式，我们得

$$
\begin{aligned}
&\liminf_{T\to\infty} \sup_{\substack{0\le v\le d_T\\ 0<t\le b_T}} \frac{\big|X\big(R(t,a_T,v,c_T)\big)\big|}{H_2(t,a_T,v,c_T)\big(2\log(\frac{b_T}{a_T}+1)(1+\frac{d_T}{c_T})\big)^{1/2}} \\
&\ge \frac{1}{(1+\varepsilon)^3} - 2\varepsilon \quad \text{a.s.}
\end{aligned} \tag{2.6.80}
$$

由 (2.6.80), (2.6.69) 和 (2.6.70) 知 (2.6.72) 和 (2.6.73) 成立. 定理 2.6.2 得证.

对于本节一开始给出的例子，我们有下述推论.

推论 2.6.1 令 $\{W(x,y); -\infty < x,y < \infty\}$ 为一标准两参数 Wiener 过程. 假设

$$
\log\log\Big(Ta_T + \frac{1}{Ta_T} + \frac{1}{b_T}\Big) = o\Big(\log\frac{b_T}{a_T}\Big), \quad T\to\infty.
$$

则

$$
\lim_{T\to\infty} \sup_{0\le t\le b_T} \frac{|W(t+a_T,T)-W(t,T)|}{\big(2Ta_T\log\frac{b_T}{a_T}\big)^{1/2}} = 1 \quad \text{a.s.},
$$

$$
\lim_{T\to\infty} \sup_{|t|\le b_T} \sup_{0\le s\le a_T} \frac{|W(t+s,T)-W(t,T)|}{\big(2Ta_T\log\frac{b_T}{a_T}\big)^{1/2}} = 1 \quad \text{a.s.}
$$

推论 2.6.2 设 $\{W(x,y); -\infty < x,y < \infty\}$ 为一标准两参数 Wiener 过程. 假设

$$
\begin{aligned}
&\log\log\Big(a_T + c_T + a_Tc_T + \frac{1}{a_Tc_T} + \frac{1}{b_T} + \frac{1}{d_T}\Big) \\
&= o\Big(\log\Big(\frac{b_T}{a_T}+1\Big)\Big(\frac{d_T}{c_T}+1\Big)\Big), \quad T\to\infty.
\end{aligned}
$$

则

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le v\le d_T}\sup_{0\le t\le b_T}\frac{\left|W\big(R(t,a_T,v,c_T)\big)\right|}{\left(2a_Tc_T\log(\frac{b_T}{a_T}+1)(\frac{d_T}{c_T}+1)\right)^{1/2}}=1\quad \text{a.s.},$$

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le v\le d_T}\sup_{0\le u\le c_T}\sup_{0\le t\le b_T}\sup_{0\le s\le a_T}\frac{\left|W\big(R(t,s,v,u)\big)\right|}{\left(2a_Tc_T\log(\frac{b_T}{a_T}+1)(\frac{d_T}{c_T}+1)\right)^{1/2}}$$
$$=1\quad \text{a.s.}$$

推论 2.6.3 设 $\{K(x,y);0\le x\le 1,0\le y<\infty\}$ 为一 Kiefer 过程, a_T 和 b_T 为连续函数, 满足 $0\le a_T+b_T\le 1$. 假设

$$\log\log\Big(\frac{1}{b_T}+Ta_T+\frac{1}{Ta_T}\Big)=o\Big(\log\frac{b_T}{a_T}\Big),\quad T\to\infty.$$

则

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le b_T}\frac{|K(t+a_T,T)-K(t,T)|}{\left(2Ta_T(1-a_T)\log\frac{b_T}{a_T}\right)^{1/2}}=1\quad \text{a.s.},$$

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le b_T}\sup_{0\le s\le a_T}\frac{|K(t+s,T)-K(t,T)|}{\left(2Ta_T(1-a_T)\log\frac{b_T}{a_T}\right)^{1/2}}=1\quad \text{a.s.}$$

推论 2.6.4 设 $\{K(x,y);0\le x\le 1,0\le y<\infty\}$ 为一 Kiefer 过程, a_T, b_T, c_T, d_T 为连续函数, 满足 $0\le a_T+b_T\le 1$ 和 $0\le a_T\le 1/2$. 假设

$$\log\log\Big(\frac{1}{b_T}+\frac{1}{d_T}+c_T+\frac{1}{a_Tc_T}\Big)$$
$$=o\Big(\log\Big(\frac{b_T}{a_T}+1\Big)\Big(\frac{d_T}{c_T}+1\Big)\Big),\quad T\to\infty.$$

则

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le v\le d_T}\sup_{0\le t\le b_T}\frac{\left|K\big(R(t,a_T,v,c_T)\big)\right|}{\left(2a_T(1-a_T)c_T\log(\frac{b_T}{a_T}+1)(\frac{d_T}{c_T}+1)\right)^{1/2}}$$
$$=1\quad \text{a.s.},$$

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{\substack{0\le v\le d_T\\0\le u\le c_T}}\sup_{\substack{0\le t\le b_T\\0\le s\le a_T}}\frac{\left|K\big(R(t,s,v,u)\big)\right|}{\left(2a_T(1-a_T)c_T\log(\frac{b_T}{a_T}+1)(\frac{d_T}{c_T}+1)\right)^{1/2}}$$
$$=1\quad \text{a.s.}$$

推论 2.6.1—2.6.4 容易证明，其证明从略.

推论 2.6.5 设 $\{X(t,v);-\infty<t,v<\infty\}$ 为例 2.6.3 所示的 Gauss 过程. 记

$$H^2(a_T,T):=H_1^2(t,a_T,T)=2\int_0^T\frac{\gamma(x)}{\lambda(x)}\Big(1-\exp\big(-\lambda(x)a_T\big)\Big)\,dx.$$

假设存在 $c_0>0$ 使得对任何 $0<s\le a_T$ 有

$$\int_{0<x\le T\ \lambda(x)\ge 1/s}\frac{\gamma(x)}{\lambda(x)}dx\le c_0 s\int_{0<x\le T\ \lambda(x)\le 1/s}\gamma(x)\,dx,\quad(2.6.81)$$

且

$$\log\log\Big(a_T+\frac{1}{b_T}+\tilde H(a_T,T)\Big)=o\Big(\log\frac{b_T}{a_T}\Big),\quad T\to\infty.$$

则

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\frac{|X(t+a_T,T)-X(t,T)|}{H(a_T,T)(2\log\frac{b_T}{a_T})^{1/2}}=1\quad\text{a.s.},$$

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\sup_{0\le s\le a_T}\frac{|X(t+s,T)-X(t,T)|}{H(a_T,T)(2\log\frac{b_T}{a_T})^{1/2}}=1\quad\text{a.s.}$$

证明 注意到对任何 $v,u>0$ 有

$$EX(t,v)X(s,u)=\int_0^{v\wedge u}\exp\big(-\lambda(y)|t-s|\big)\frac{\gamma(y)}{\lambda(y)}\,dy,$$

我们可以验证条件 (2.6.45), (2.6.49), (2.6.28) 满足. 下面证明 $H^2(s,T)/s^\alpha$ 在 $(0,a_T)$ 上关于 s 单调增加，其中 $\alpha=1/(6(c_0+1))$. 令

$$f(s)=H_1^2(s,T)/s^\alpha=2\int_0^T\frac{\gamma(x)}{\lambda(x)}\big(1-\exp(-\lambda(x)s)\big)\,dx/s^\alpha.$$

则由 (2.6.81), 对 $0<\alpha<1/(3(c_0+1))$ 有

$$\begin{aligned}f'(s)=&2s^{-\alpha-1}\Big(-\alpha\int_0^T\frac{\gamma(x)}{\lambda(x)}(1-\exp(-\lambda(x)s))dx\\&+\int_0^T s\gamma(x)\exp(-\lambda(x)s)dx\Big)\\\geq&2s^{-\alpha-1}\Big(-\alpha\int_{0\leq x\leq T:\lambda(x)\geq 1/s}\frac{\gamma(x)}{\lambda(x)}\,dx\\&-\alpha s\int_{0\leq x\leq T:\lambda(x)\leq 1/s}\gamma(x)dx+\frac{s}{3}\int_{0\leq x\leq T:\lambda(x)\leq 1/s}\gamma(x)\,dx\Big)\\\geq&2s^{-\alpha-1}\Big(-\alpha(c_0+1)s\int_{0\leq x\leq T:\lambda(x)\leq 1/s}\gamma(x)dx\\&+\frac{s}{3}\int_{0\leq x\leq T:\lambda(x)\leq 1/s}\gamma(x)dx\Big)>0,\end{aligned}$$

这就是要证的. 因此条件 (2.6.46) 满足. 由定理 2.6.1, 推论 2.6.5 得证.

推论 2.6.6 设 $d,b>0$, $\{X(t,v);-\infty<t,v<\infty\}$ 为例 2.6.3 所示的 Gauss 过程. 假设当 $T\to\infty$ 时, $a_T\to 0$, $c_T\to\infty$, 且对任何 $0<x<y\leq 1$ 有

$$\sup_{0<x<d+b}\lambda(x)<\infty, \tag{2.6.82}$$

$$x^{1-\alpha}\gamma(x)\leq c_0y^{1-\alpha}\gamma(y) \text{ 和 } \gamma(y)y^{-1/\alpha}\leq c_0\gamma(x)x^{-1/\alpha}, \tag{2.6.83}$$

其中 $0<\alpha<1$, $c>0$. 则

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\leq v\leq d}\sup_{0\leq t\leq b}\frac{\big|X\big(R(t,a_T,v,c_T)\big)\big|}{H(a_T,v,c_T)(2\log{(c_Ta_T)}^{-1})^{1/2}}=1\quad\text{a.s.},$$

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\leq v\leq d}\sup_{0\leq u\leq c_T}\sup_{|t|\leq b}\sup_{0\leq s\leq a_T}\frac{\big|X\big(R(t,s,v,u)\big)\big|}{H(a_T,v,c_T)(2\log{(c_Ta_T)}^{-1})^{1/2}}$$
$$=1\quad\text{a.s.},$$

其中 $H^2(a_T,v,c_T)=2\int_v^{v+c_T}\frac{\gamma(x)}{\lambda(x)}\big(1-\exp(-\lambda(x)a_T)\big)\,dx$.

证明 记 $M=\sup_{0<x\le d+b}\lambda(x)$. 则由 (2.6.82) 有 $M<\infty$. 由 (2.6.83) 得

$$\int_0^{d+b}\gamma(x)\,dx<\infty. \tag{2.6.84}$$

显然，对 $0<s\le 1/M$, $0\le v+c\le d+b$ 有

$$\begin{aligned}\frac{s}{3}\int_v^{v+c}\gamma(x)dx&\le\int_v^{v+c}\frac{\gamma(x)}{\lambda(x)}\Big(1-\exp\big(-\lambda(x)s\big)\Big)dx\\&=\frac{1}{2}H^2(s,v,c)\le s\int_v^{v+c}\gamma(x)dx,\end{aligned}$$

从而条件 (2.6.29) 满足. 下面证明条件 (2.6.67) 也满足. 这只要证

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\le v\le d+\frac{b}{2}}\sup_{-\delta c_T\le u\le c_T}\frac{H^2(a_T,v+u,\delta c_T)}{H^2(a_T,v,c_T)}=0. \tag{2.6.85}$$

再次由 (2.6.82), 我们得当 $T\to\infty$ 时，对 $0<v\le d+b$, $0<c\le 1$ 一致成立

$$\frac{H^2(a_T,v,c)}{2a_T\int_v^{v+c}\gamma(x)dx}\to 1.$$

从而等价地，只要证

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\le v\le d+b/2}\sup_{-\delta c_T\le u\le c_T}\frac{\int_{v+u}^{v+u+\delta c_T}\gamma(x)dx}{\int_v^{v+c_T}\gamma(x)dx}=0. \tag{2.6.86}$$

注意到 $\gamma(x)$ 是 $(0,\infty)$ 的正连续函数，我们有

$$0<\inf_{1/3\le x\le d+b}\gamma(x)\le\sup_{1/3\le x\le d+b}\gamma(x)<\infty.$$

从而

$$\begin{aligned}&\lim_{\delta\to 0}\limsup_{T\to\infty}\sup_{1/2\le v\le d+b/2}\sup_{-\delta c_T\le u\le c_T}\frac{\int_{v+u}^{v+u+\delta c_T}\gamma(x)dx}{\int_v^{v+c_T}\gamma(x)dx}\\&\le\lim_{\delta\to 0}\delta\frac{\sup_{1/3\le x\le d+b}\gamma(x)}{\inf_{1/3\le x\le d+b}\gamma(x)}=0.\end{aligned} \tag{2.6.87}$$

若 $0 < v \le 1/2$, $-\delta c_T \le u \le c_T/2$, 则

$$\int_v^{v+c_T} \gamma(x)dx \ge \int_{v+2c_T/3}^{v+c_T} \gamma(x)dx \ge \frac{c_T}{3}\gamma(x_0), \tag{2.6.88}$$

其中 $v + c_T/3 \le x_0 \le v + c_T$. 由 (2.6.83) 得

$$\begin{aligned}\int_{v+u}^{v+u+\delta c_T} \gamma(x)dx &\le c_0 x_0^{1-\alpha}\gamma(x_0)\int_{v+u}^{v+u+\delta c_T} \frac{1}{x^{1-\alpha}}dx \\ &= \frac{c_0}{\alpha}x_0^{1-\alpha}\gamma(x_0)\big((v+u+\delta c_T)^\alpha - (v+u)^\alpha\big) \\ &\le \frac{c_0}{\alpha}(v+c_T)^{1-\alpha}\gamma(x_0)\big((v+u+\delta c_T)^\alpha - (v+u)^\alpha\big) \\ &\le \frac{6c_0(\delta^\alpha + \delta)c_T\gamma(x_0)}{\alpha}.\end{aligned} \tag{2.6.89}$$

若 $0 < v \le \frac{1}{2}$, $\frac{c_T}{2} \le u \le c_T$, 则

$$\int_{v+u}^{v+u+\delta c_T} \gamma(x)dx = \gamma(y_0)\delta c_T, \tag{2.6.90}$$

其中 $v + u \le y_0 \le v + u + \delta c_T$. 再次由 (2.6.83), 我们得

$$\begin{aligned}\int_v^{v+c_T} \gamma(x)dx &\ge \int_v^{v+c_T/2} \gamma(x)dx \ge \frac{\gamma(y_0)}{c_0 y_0^{1/\alpha}}\int_v^{v+c_T/2} x^{\frac{1}{\alpha}}dx \\ &\ge \frac{\alpha\gamma(y_0)}{2c_0 y_0^{1/\alpha}}\left(\left(v + \frac{c_T}{2}\right)^{1+1/\alpha} - v^{1+1/\alpha}\right) \\ &\ge \frac{\alpha\gamma(y_0)}{2c_0\cdot 2^{1/\alpha}(v+c_T)^{1/\alpha}}\left(\left(v + \frac{c_T}{2}\right)^{1+1/\alpha} - v^{1+1/\alpha}\right) \\ &\ge \frac{\alpha\gamma(y_0)c_T}{c_0\cdot(12)^{1+1/\alpha}}.\end{aligned} \tag{2.6.91}$$

综合 (2.6.87)—(2.6.91) 得 (2.6.86). (2.6.67) 得证. 由定理 2.6.2, 推论 2.6.6 得证.

推论 2.6.7 设 $\{X(t,v); -\infty < t < \infty, 0 \le v < \infty\}$ 为例 2.6.4 所示的 Gauss 过程. 假设对每个 k, $\phi_k(v)$ 是 v 的非降函数,

并且存在 $c_0>0$ 使得

$$\sum_{\lambda_k\geq 1/s}\phi_k^2(v)\frac{\gamma_k}{\lambda_k}\leq c_0 s\sum_{\lambda_k\leq 1/s}\phi_k^2(v)\cdot\gamma_k\quad \forall 0<s\leq 1, v>0$$

和

$$\log\log\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\phi_k^2(T)\frac{\gamma_k}{\lambda_k}\Big)=o\Big(\log\frac{1}{a_T}\Big),\quad T\to\infty$$

成立. 则

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\leq t\leq 1}\frac{|X(t+a_T,T)-X(t,T)|}{H_1(a_T,T)(2\log\frac{1}{a_T})^{1/2}}=1\quad \text{a.s.},$$
$$\lim_{T\to\infty}\sup_{|t|\leq 1}\sup_{0\leq s\leq a_T}\frac{|X(t+s,T)-X(t,T)|}{H_1(a_T,T)(2\log\frac{1}{a_T})^{1/2}}=1\quad \text{a.s.},$$

其中 $H_1^2(a_T,T)=2\sum_{k=1}^{\infty}\phi_k^2(T)(1-e^{-\lambda_k a_T})\frac{\gamma_k}{\lambda_k}$.

推论 2.6.7 易证，其证明从略.

§2.7 Gauss 过程局部时的连续模

设 $\{X(t);t\geq 0\}$ 为一个实值随机过程. 对实数集上的任意 Borel 集 A, 令

$$H(A,t)=\lambda\{s:0\leq s\leq t, X(s)\in A\},\quad t\geq 0, \tag{2.7.1}$$

称为 X 的占有时，其中 λ 为 Lebesgue 测度. 如果对每个固定的 t, $H(\cdot,t)$ 相对于 Lebesgue 测度绝对连续，则它的 Radon-Nikodym 导数称为 $X(\cdot)$ 在 t 处的局部时，记为 $L(\cdot,t)$, 这时我们称 $X(\cdot)$ 的局部时存在. 由 $L(x,t)$ 的定义知

$$L(x,0)=0,\quad L(x,s)\leq L(x,t),\quad \forall t\geq s\geq 0, x\in\mathcal{R}. \tag{2.7.2}$$

$$H(A,t)=\int_A L(x,t)\,dx, \tag{2.7.3}$$

$$H(A,t+h)-H(A,t)=\int_A (L(x,t+h)-L(x,t))\,dx,\quad \forall t,h\geq 0. \tag{2.7.4}$$

对于 Wiener 过程的局部时, 已经有许多经典的结果. Hawkes (1971) 得到了关于 t 的连续模: 令 $l(x,t)$ 为 W 的局部时, 则

$$\lim_{h\to 0}\sup_{0\le t\le 1-h}\frac{l(0,t+h)-l(0,t)}{\{h\log h^{-1}\}^{1/2}}=1 \quad \text{a.s.} \tag{2.7.5}$$

Perkins (1981) 得到了

$$\limsup_{h\to 0}\sup_{0\le t\le 1-h}\sup_{-\infty<x<\infty}\frac{l(x,t+h)-l(x,t)}{\{2h\log\frac{1}{h}\}^{1/2}}=1 \quad \text{a.s.} \tag{2.7.6}$$

Csáki, Csörgő, Földes 和 Révész (1983) 证明了在 (2.7.6) 中可用 $\lim_{h\to 0}$ 代替 $\limsup_{h\to 0}$, 并且得到了下述结果:

定理 2.7.1 设 $0<a_T\le T$ 为 $T\ge 0$ 的非降函数, 假设 a_T/T 非增. 则对任何 $x\in R$ 有

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\frac{l(x,t+a_T)-l(x,t)}{\{a_T(\log\frac{T}{a_T}+2\log\log T)\}^{1/2}}=1 \quad \text{a.s.} \tag{2.7.7}$$

并且

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\sup_{-\infty<x<\infty}\frac{l(x,t+a_T)-l(x,t)}{\{2a_T(\log\frac{T}{a_T}+\log\log T)\}^{1/2}}=1 \quad \text{a.s.} \tag{2.7.8}$$

进一步, 如果还假设 $\lim_{T\to\infty}(\log\frac{T}{a_T})/\log\log T=\infty$, 则 (2.7.7) 和 (2.7.8) 中的 $\limsup_{T\to\infty}$ 可用 $\lim_{T\to\infty}$ 代替.

在 (2.7.7) 和 (2.7.8) 中取 $a_T=T$, 我们得到由 Kesten (1965) 证明的重对数律, 即对 Wiener 过程的局部时 $l(\cdot,\cdot)$ 有

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{l(x,T)}{(2T\log\log T)^{1/2}}=\limsup_{T\to\infty}\frac{\sup_{-\infty<x<\infty}l(x,T)}{(2T\log\log T)^{1/2}}=1 \quad \text{a.s.} \tag{2.7.9}$$

在这一节中, 我们给出关于 Gauss 过程 $\{X(t);t\ge 0\}$ 局部时 $L(x,t)$ 的类似于 (2.7.5), (2.7.6) 和 (2.7.7) 的结果, 这些结果是由

Csörgő, Lin 和 Shao (1995) 得到的.

2.7.1 Gauss 过程局部时的增量的矩估计

设 $\{X(t); t \geq 0\}$ 为一个零均值、具有平稳增量的 Gauss 过程. 记

$$\sigma^2(h) = E(X(t+h) - X(t))^2, \quad t, h \geq 0.$$

我们知道 (参见 Berman 1969 和 Geman 1976): 如果

$$\int_0^t \frac{ds}{\sigma(s)} < \infty \qquad \forall t > 0, \tag{2.7.10}$$

则 X 的局部时 $L(x,t)$ 存在. 此外, 如果 $\sigma^2(h)$ 连续并且是在 $[0,1]$ 上的凹函数, 则 X 的局部时 $L(x,t)$ 存在且是几乎处处联合连续的 (参见 Berman 1972).

下述定理给出了 $L(x,t)$ 关于 t 的增量的矩估计.

命题 2.7.1 设 $\{X(t); t \geq 0\}$ 为一个零均值、具有平稳增量的 Gauss 过程, 且 $X(0) = 0$. 记 $\sigma^2(h) = E(X(t+h) - X(t))^2$. 假设 $\sigma^2(h)$ 非降且在 $(0, h_0)$ 上为凹函数, 并且对某个 $0 < \alpha \leq 1/2$, $c_0 > 0$, $h_0 > 0$ 成立

$$\sigma(ah) \geq c_0 a^\alpha \sigma(h) \quad \forall 0 < a < 1, 0 \leq h \leq h_0. \tag{2.7.11}$$

则对任何 $0 < h \leq h_0$, $x \in \mathcal{R}$ 和任何整数 $m \geq 1$ 有

$$E(L(x,t+h) - L(x,t))^m \leq \Big(\frac{16h}{c_0\sigma(h)}\Big)^m (m!)^\alpha \exp\Big(-\frac{x^2}{2\sigma^2(t+h)}\Big). \tag{2.7.12}$$

为了证明这一命题, 我们需要一些引理.

引理 2.7.1 设 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 为二阶矩存在的随机变量, A_n 为它们的协方差矩阵. 则

$$|A_n| \leq |A_{n-1}| Var\xi_n, \tag{2.7.13}$$

其中 $|A_n|$ 表示 A_n 的行列式.

证明 记 $A_n=(a_{ij}:1\le i,j\le n)$, 其中 $a_{ij}=Cov(\xi_j,\xi_j)$. 注意到

$$(a_{1n},\cdots,a_{n-1,n})'(a_{1n},\cdots,a_{n-1,n})$$

为半正定矩阵, 我们得

$$\begin{aligned}|A_n|=&\left|\left(a_{ij}-\frac{a_{ni}a_{nj}}{a_{nn}},1\le i,j\le n-1\right)\right|Var\xi_n\\=&\left|\left(Cov\left(\xi_i-\frac{a_{1i}\xi_n}{a_{nn}},\xi_j-\frac{a_{1j}\xi_n}{a_{nn}}\right),1\le i,j\le n-1\right)\right|Var\xi_n\\=&|(a_{ij},1\le i,j\le n-1)-(a_{1n},\cdots,a_{n-1,n})'(a_{1n},\cdots,a_{n-1,n})|\\&\cdot Var\xi_n\\\le&|(a_{ij},1\le i,j\le n-1)|Var\xi_n\\=&|A_{n-1}|Var\xi_n,\end{aligned}$$

(2.7.13) 得证.

引理 2.7.2 设 $B_n=(b_{ij};1\le i,j\le n)$ 和 $\tilde{B}_{n-1}=(b_{ij};2\le i,j\le n)$ 为实值矩阵. 假设对每个 $1\le i\le n$ 有 $|b_{ii}|\ge\sum_{j\ne i}|b_{ij}|$. 则

$$|B_n|\ge\left(|b_{11}|-\sum_{i=2}^{n}|b_{1i}|\right)|\tilde{B}_{n-1}|\ge|b_{nn}|\prod_{i=1}^{n-1}\left(|b_{ii}|-\sum_{j=i+1}^{n}|b_{ij}|\right).$$

证明见 Price (1951).

引理 2.7.3 设 $\{\xi(t);t\ge0\}$ 为一个零均值、具有平稳增量的 Gauss 过程, 且 $\xi(0)=0$. 记 $\sigma^2(h)=E(\xi(t+h)-\xi(t))^2$. 假设 $\sigma^2(h)$ 非降且在 $(0,h_0)$ 上为凹函数. 对 $t\le t_1<t_2<\cdots<t_n\le t+h_0$ 令 A_n 为 $\xi(t_1),\cdots,\xi(t_n)$ 的协方差矩阵. 则

$$|A_n|\ge(1/2)^n\sigma^2(t_1)\prod_{i=2}^{n}\sigma^2(t_i-t_{i-1}).$$

证明 由 $\sigma^2(h)$ 的凹性得对任何 $0\le a\le b\le c\le d\le h_0+t$ 有

$$\sigma^2(d-a)+\sigma^2(c-b)\le\sigma^2(d-b)+\sigma^2(c-a). \tag{2.7.14}$$

令 $\tilde{A}_n$ 为 $\xi(t_1), \xi(t_2)-\xi(t_1)\cdots, \xi(t_n)-\xi(t_{n-1})$ 的协方差矩阵. 易知 $|A_n|=|\tilde{A}_n|$.

记 $\tilde{A}_n=(a_{ij}, 1\le i,j\le n)$, 其中

$$\begin{aligned}
&a_{11}=E\xi^2(t_1),\\
&a_{1i}=E\xi(t_1)(\xi(t_i)-\xi(t_{i-1})),\quad 2\le i\le n,\\
&a_{ij}=E(\xi(t_i)-\xi(t_{i-1}))(\xi(t_j)-\xi(t_{j-1})),\quad 2\le i,j\le n.
\end{aligned}$$

当 $1<i<j\le n$ 时, 由 (2.7.14) 有

$$\begin{aligned}
a_{ij}=&\frac{1}{2}\Big(\sigma^2(t_j-t_{i-1})+\sigma^2(t_{j-1}-t_i)\\
&-\sigma^2(t_j-t_i)-\sigma^2(t_{j-1}-t_{i-1})\Big)\le 0;
\end{aligned}$$

当 $1<i\le n$ 时, 再次由 (2.7.14) 我们有

$$a_{1i}=\big(\sigma^2(t_{i-1}-t_1)+\sigma^2(t_i)-\sigma^2(t_i-t_1)-\sigma^2(t_{i-1})\big)/2\le 0.$$

从而对 $1\le i<n$ 有

$$\begin{aligned}
\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|=&-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}\\
=&-E(\xi(t_i)-\xi(t_{i-1}))(\xi(t_n)-\xi(t_i))\\
=&\frac{1}{2}\Big(\sigma^2(t_n-t_i)+\sigma^2(t_i-t_{i-1})-\sigma^2(t_n-t_{i-1})\Big)\\
\le&\frac{1}{2}\sigma^2(t_i-t_{i-1})=\frac{1}{2}a_{ii},
\end{aligned} \tag{2.7.15}$$

其中 $t_0=0$; 对 $2\le i\le n$ 有

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{i-1}|a_{ij}|=&-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}=-E(\xi(t_i)-\xi(t_{i-1}))\xi(t_{i-1})\\
=&\frac{1}{2}\Big(\sigma^2(t_i-t_{i-1})-E\xi^2(t_i)+E\xi^2(t_{i-1})\Big)
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2}\sigma^2(t_i - t_{i-1}).$$

因此对每个 $1 \leq i \leq n$ 成立

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

由引理 2.7.2 和 (2.7.15), 结论得证.

如同 Berman (1969, 1974) 一样, 我们利用 Fourier 分析来研究局部时. 令

$$f(u,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\, d_x H([0,x],t) = \int_0^t e^{iuX(s)}\, ds, \quad -\infty < u < \infty,$$

为占有时 $H([0,x],t)$ 的 Fourier 变换. 我们可以把 $L(x,t)$ 表示为 $f(u,t)$ 的 Fourier 逆变换, 即

$$\begin{aligned} L(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} f(u,t)\, du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} e^{iuX(s)}\, du\, ds. \end{aligned} \tag{2.7.16}$$

引理 2.7.4 设 $\{X(t); t \geq 0\}$ 为零均值、具有平稳增量的 Gauss 过程, 其增量的方差函数为 $\sigma^2(h)$. 令 $m \geq 1$ 为一整数, $R(s_1, \cdots, s_m)$ 为 $X(s_1)$, $X(s_2) - X(s_1)$, $\cdots$, $X(s_m) - X(s_{m-1})$ 的协方差矩阵. 则对任何 $x \in \mathcal{R}$, $t \geq 0$ 和 $h > 0$ 有

$$\begin{aligned} &E(L(x,t+h) - L(x,t))^m \\ \leq &\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m/2} m! \int \cdots \int_{t \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_m \leq t+h} \exp\left(-\frac{x^2}{2EX^2(s_1)}\right) \\ &\cdot |R(s_1, \cdots, s_m)|^{-1/2} ds_1, \cdots, ds_m. \end{aligned} \tag{2.7.17}$$

证明 记 $v_j = \sum_{i=j}^m u_i$, $1 \leq j \leq m$, $V = (v_1, \cdots, v_m)$. 利用 (2.7.16), 可写

$$
\begin{aligned}
&E(L(x,t+h)-L(x,t))^m \\
&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^m\int_t^{t+h}\cdots\int_t^{t+h}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-ix\sum_{j=1}^m u_j\right)E \\
&\quad\cdot\exp\left(i\sum_{j=1}^m u_jX(s_j)\right)du_1\cdots du_m ds_1\cdots ds_m \\
&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^m m!\int\cdots\int_{t\le s_1<s_2<\cdots<s_m\le t+h}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-ixv_1) \\
&\quad\cdot E\exp\left[iv_1X(s_1)+i\sum_{j=2}^m v_j(X(s_j)-X(s_{j-1}))\right]dv_1\cdots dv_m ds_1\cdots ds_m \\
&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^m m!\int\cdots\int_{t\le s_1<s_2<\cdots<s_m\le t+h}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-ixv_1\right. \\
&\quad\left.-\frac{1}{2}VR(s_1,\cdots,s_m)V'\right]dv_1\cdots dv_m ds_1\cdots ds_m.
\end{aligned}
$$

为证 (2.7.17), 只要证

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-ixv_1-\frac{1}{2}VR(s_1,\cdots,s_m)V'\right]dv_1\cdots dv_m \\
&\quad\le(2\pi)^{m/2}\exp\left(-\frac{x^2}{2EX^2(s_1)}\right)|R(s_1,\cdots,s_m)|^{-1/2}. \qquad (2.7.18)
\end{aligned}
$$

若 $|R(s_1,\cdots,s_m)|=0$, 显然有 (2.7.18). 因此我们设 $|R(s_1,\cdots,s_m)|>0$, 即 $R(s_1,\cdots,s_m)$ 是正定的. 从而 $R^{-1}(s_1,\cdots,s_m)$ 也是正定的. 令 $(Y_1,\cdots,Y_m)$ 为一个零均值、以 $R^{-1}(s_1,\cdots,s_m)$ 为协方差矩阵的多维正态变量. 则 $(Y_1,\cdots,Y_m)$ 的密度函数为

$$
\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{-m/2}|R(s_1,\cdots,s_m)|^{1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}VR(s_1,\cdots,s_m)V'\right).
$$

从而

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-ixv_1-\frac{1}{2}VR(s_1,\cdots,s_m)V'\right]dv_1\cdots dv_m \\
&\quad=(2\pi)^{m/2}|R(s_1,\cdots,s_m)|^{-1/2}Ee^{-ixY_1} \\
&\quad=(2\pi)^{m/2}|R(s_1,\cdots,s_m)|^{-1/2}e^{-(x^2/2)EY_1^2}. \qquad (2.7.19)
\end{aligned}
$$

记 $R(s_1,\cdots,s_n)=(\gamma_{ij},1\le i,j\le n)$. 则由引理 2.7.1 得

$$EY_1^2=\frac{|(\gamma_{i,j},2\le i,j\le n)|}{|(\gamma_{ij},1\le i,j\le n)|}\ge\frac{1}{\gamma_{11}}=\frac{1}{EX^2(s_1)}. \tag{2.7.20}$$

由 (2.7.19) 和 (2.7.20), (2.7.18) 得证, 从而 (2.7.17) 得证.

命题 2.7.1 的证明 由引理 2.7.3, 2.7.4 和 (2.7.11) 得

$$\begin{aligned}
&E(L(x,t+h)-L(x,t))^m\\
&\le\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m/2}m!\int\cdots\int_{t\le s_1<s_2<\cdots<s_m\le t+h}\\
&\quad\frac{\exp(-x^2/2EX^2(s_1))2^m}{\sigma(s_1)\prod_{j=2}^m\sigma(s_j-s_{j-1})}ds_1\cdots ds_m\\
&\le\left(\frac{2}{\pi}\right)^{m/2}m!\exp\Big(-\frac{x^2}{2\sigma^2(t+h)}\Big)\int\cdots\int_{t\le s_1<s_2<\cdots<s_m\le t+h}\\
&\quad\frac{1}{\sigma(s_1)\prod_{j=2}^m\sigma(s_j-s_{j-1})}ds_1\cdots ds_m\\
&=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{m/2}m!h^m\exp\Big(-\frac{x^2}{2\sigma^2(t+h)}\Big)\int\cdots\int_{0\le s_1<s_2<\cdots<s_m\le 1}\\
&\quad\frac{1}{\sigma(s_1h+t)\prod_{j=2}^m\sigma((s_j-s_{j-1})h)}ds_1\cdots ds_m\\
&\le\left(\frac{2}{\pi}\right)^{m/2}\frac{m!h^m\exp(-x^2/2\sigma^2(t+h))}{\sigma(h+t)\sigma^{m-1}(h)c_0^m}\int\cdots\int_{0\le s_1<s_2<\cdots<s_m\le 1}\\
&\quad\frac{1}{s_1^\alpha\prod_{j=2}^m(s_j-s_{j-1})^\alpha}ds_1\cdots ds_m.
\end{aligned}\tag{2.7.21}$$

通过一些初等的计算 (参见 Ehm 1981), 对 $b_j<1$, $j=1,\cdots,m$ 成立

$$\begin{aligned}
&\int\cdots\int_{0\le s_1<s_2<\cdots<s_m\le 1}\prod_{j=1}^m(s_j-s_{j-1})^{-b_j}ds_1\cdots ds_m\\
&=\Big(\prod_{j=1}^m\Gamma(1-b_j)\Big)\Big/\Gamma\Big(1+m-\sum_{j=1}^m b_j\Big),
\end{aligned}$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 为 gamma 函数. 从而

$$E(L(x,t+h)-L(x,t))^m \le \left(\frac{2}{\pi c_0^2}\right)^{m/2} m!\left(\frac{h}{\sigma(h)}\right)^m$$
$$\cdot \exp(-x^2/2\sigma^2(t+h))\frac{\Gamma^m(1-\alpha)}{\Gamma(1+m(1-\alpha))}. \qquad (2.7.22)$$

易知, 当 $0<\alpha\le 1/2$ 时,

$$\Gamma(1-\alpha)\le \frac{2}{1-\alpha}\le 4.$$

注意到 $\Gamma(y)$ 在 $(3/2,\infty)$ 上非降, 我们有

$$\Gamma(1+m(1-\alpha))\ge \Gamma(1+[m(1-\alpha)])=[m(1-\alpha)]!.$$

利用 Stirling 公式得

$$\frac{m!}{[m(1-\alpha)]!}\le 2^m\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^m (m!)^\alpha \le 4^m (m!)^\alpha.$$

从而

$$E(L(x,t+h)-L(x,t))^m \le \left(\frac{16h}{c_0\sigma(h)}\right)^m\cdot (m!)^\alpha \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2(t+h)}\right).$$

(2.7.12) 得证.

对平稳的 Gauss 过程, 我们有

命题 2.7.2 设 $\{X(t);t\ge 0\}$ 为一个零均值的平稳 Gauss 过程且 $EX^2(0)=1$. 记 $\sigma^2(h)=E(X(t+h)-X(t))^2$. 假设 $\sigma^2(h)$ 是 $(0,h_0)$ 上的非降凹函数, $\sigma^2(h_0)\le 2$ 满足条件 (2.7.11). 则对任何 $0<h\le h_0$, $x\in\mathcal{R}$ 和任何整数 $m\ge 2$ 有

$$E(L(x,t+h)-L(x,t))^m \le \sigma(h)\left(\frac{16h}{c_0\sigma(h)}\right)^m (m!)^\alpha \exp(-x^2/2). \qquad (2.7.23)$$

证明 只要用下述引理代替引理 2.7.3, 上述命题的证明与命题 2.7.1 的类似, 故从略.

引理 2.7.5 设 $\{\xi(t); t \geq 0\}$ 为零均值平稳 Gauss 过程且 $E\xi^2(0) = 1$. 记 $\sigma^2(h) = E(\xi(t+h) - \xi(t))^2$. 假设 $\sigma^2(h)$ 为 $(0, h_0)$ 上的非降凹函数且 $\sigma^2(h_0) \leq 2$. 对 $t \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq t + h_0$, 令 A_n 为 $\xi(t_1), \cdots, \xi(t_n)$ 的协方差矩阵. 则

$$|A_n| \geq (1/2)^n \prod_{i=2}^{n} \sigma^2(t_i - t_{i-1}). \tag{2.7.24}$$

证明 令 $\tilde{A}_n$ 为 $\xi(t_n), \xi(t_{n-1}) - \xi(t_n), \cdots, \xi(t_1) - \xi(t_2)$ 的协方差矩阵. 则 $|A_n| = |\tilde{A}_n|$. 余下的证明与引理 2.7.3 的完全类似, 故从略.

对于具有平稳增量的 Gauss 过程的局部时增量的最大值, 我们有下述估计.

命题 2.7.3 设 $\{X(t); t \geq 0\}$ 为一个零均值、具有平稳增量的 Gauss 过程且 $X(0) = 0$. 记 $\sigma^2(h) = E(X(t+h) - X(t))^2$. 假设 $\sigma^2(h)$ 为 $(0,1)$ 上的非降凹函数, 对某 $0 < \alpha \leq 1/2$ 和 $c_0 > 0$ 满足

$$\sigma(ah) \geq c_0 a^\alpha \sigma(h) \quad \forall 0 < a, h \leq 1. \tag{2.7.25}$$

则对任何 $0 < h \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$ 和任意整数 $m \geq 4$ 有

$$E \sup_x (L(x, t+h) - L(x,t))^m \leq C_1 h^{-(4/3)\alpha} \left(\frac{524h}{c_0 \sigma(h)}\right)^m (m!)^{1+\alpha}, \tag{2.7.26}$$

其中 $C_1 = 5000(1 + \sigma(2)) c_0^{-8/3} \sigma^{-4/3}(1)$.

为证命题 2.7.3, 我们还需要一些引理.

引理 2.7.6 设 $\{X(t); t \geq 0\}$ 为零均值、具有平稳增量的 Gauss 过程, 其增量的方差函数为 $\sigma^2(h)$. 令 $m \geq 4$ 为一偶数, $R(s_1, \cdots, s_m)$ 为 $X(s_1)$, $X(s_2) - X(s_1)$, $\cdots$, $X(s_m) - X(s_{m-1})$ 的协方差矩阵. 则对任何 $0 < \delta \leq 1$, $xy \geq 0$, $t \geq 0$, $h > 0$ 有

$$E(L(x+y, t+h) - L(x+y, t) - L(x, t+h) + L(x,t))^m$$
$$\leq 3\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m/2} m! |y|^{2\delta} \int \cdots \int_{t \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_m \leq t+h} \exp\left(-\frac{x^2}{4EX^2(s_1)}\right)$$

$$\cdot|R(s_1,\cdots,s_m)|^{-1/2}\rho_m^{\delta/2}(\rho_1^{\delta/2}+\rho_2^{\delta/2})ds_1\cdots ds_m, \tag{2.7.27}$$

其中

$$\rho_m=\frac{|(\gamma_{ij},1\le i,j\le m-1)|}{|(\gamma_{ij},1\le i,j\le m)|},$$
$$\rho_1=\frac{|(\gamma_{ij},2\le i,j\le m)|}{|(\gamma_{ij},1\le i,j\le m)|},$$
$$\rho_2=\frac{|(\gamma_{ij},1\le i,j\le m;i,j\ne 2)|}{|(\gamma_{ij},1\le i,j\le m)|},$$
$$R(s_1,\cdots,s_m)=(\gamma_{ij},1\le i,j\le m).$$

证明 由 (2.7.16) 得

$$L(x+y,t+h)-L(x+y,t)-L(x,t+h)+L(x,t)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_t^{t+h}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-iu(x+y)}-e^{-iux})e^{iuX(s)}\,duds. \tag{2.7.28}$$

记 $v_j=\sum_{l=j}^m u_l$, $1\le j\le m$, $V=(v_1,\cdots,v_m)$, $v_{m+1}=0$. 由 (2.7.28), 可写

$$E(L(x+y,t+h)-L(x+y,t)-L(x,t+h)+L(x,t))^m$$
$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^m\int_t^{t+h}\cdots\int_t^{t+h}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{j=1}^m(e^{-i(x+y)u_j}-e^{-ixu_j})$$
$$\cdot E\exp\Big(i\sum_{j=1}^m u_jX(s_j)\Big)du_1\cdots du_m ds_1\cdots ds_m$$
$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^m m!\int\cdots\int_{t\le s_1<s_2<\cdots<s_m\le t+h}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{j=1}^m(e^{-i(x+y)u_j}$$
$$-e^{-ixu_j})E\exp\Big[iu_1X(s_1)+i\sum_{j=2}^m u_j(X(s_j)-X(s_{j-1}))\Big]$$
$$\cdot du_1\cdots du_m ds_1\cdots ds_m$$
$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^m m!\int\cdots\int_{t\le s_1<s_2<\cdots<s_m\le t+h}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}$$

$$\prod_{j=1}^{m}(e^{-i(x+y)(v_j-v_{j+1})}-e^{-ix(v_j-v_{j+1})})$$

$$\cdot\exp\Big(-\frac{1}{2}VR(s_1,\cdots,s_m)V'\Big)dv_1\cdots dv_m ds_1\cdots ds_m. \quad (2.7.29)$$

为证 (2.7.27), 只要证

$$\begin{aligned} I :=&\Big|\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}(e^{-i(x+y)(v_j-v_{j+1})}-e^{-ix(v_j-v_{j+1})}) \\ &\cdot\exp\Big(-\frac{1}{2}VR(s_1,\cdots,s_m)V'\Big)dv_1\cdots dv_m\Big| \\ \le& 3(2\pi)^{m/2}\exp\Big(-\frac{x^2}{4EX^2(s_1)}\Big)|R(s_1,\cdots,s_m)|^{-1/2} \\ &\cdot|y|^{2\delta}\rho_m^{\delta/2}(\rho_1^{\delta/2}+\rho_2^{\delta/2}). \end{aligned} \quad (2.7.30)$$

若 $|R(s_1,\cdots,s_m)|=0$, 则 (2.7.30) 显然成立. 因此我们可设 $|R(s_1,\cdots,s_m)|>0$, 即 $R(s_1,\cdots,s_m)$ 是正定的, 从而 $R^{-1}(s_1,\cdots,s_m)$ 也正定. 令 $(Y_1,\cdots,Y_m)$ 为零均值、以 $R^{-1}(s_1,\cdots,s_m)$ 为协方差矩阵的多维正态变量, 且 $Y_{m+1}=0$. 则

$$\begin{aligned} I =&(2\pi)^{m/2}|R(s_1,\cdots,s_m)|^{-1/2} \\ &\cdot\Big|E\prod_{j=1}^{m}(e^{-i(x+y)(Y_j-Y_{j+1})}-e^{-ix(Y_j-Y_{j+1})})\Big| \\ \le&(2\pi)^{m/2}|R(s_1,\cdots,s_m)|^{-1/2} \\ &\cdot\Big|E\prod_{j=2}^{m}(e^{-i(x+y)(Y_j-Y_{j+1})}-e^{-ix(Y_j-Y_{j+1})}) \\ &\cdot E\big((e^{-i(x+y)(Y_1-Y_2)}-e^{-ix(Y_1-Y_2)})\big|Y_2,\cdots,Y_m\big)\Big| \\ \le&(2\pi)^{m/2}|R(s_1,\cdots,s_m)|^{-1/2}E\big\{|e^{-iyY_m}-1| \\ &\cdot\big|E\big((e^{-i(x+y)(Y_1-Y_2)}-e^{-ix(Y_1-Y_2)})\big|Y_2,\cdots,Y_m\big)\big|\big\}. \end{aligned} \quad (2.7.31)$$

注意到给定 $Y_2,\cdots,Y_m$ 时, Y_1 的条件分布是正态分布, 其均值为条件均值 $E(Y_1|Y_2,\cdots,Y_m)$, 方差为条件方差

$$E(Y_1-E(Y_1|Y_2,\cdots,Y_m))^2=\frac{1}{\gamma_{11}}, \quad 其中\gamma_{11}=EX^2(s_1).$$

从而，我们有

$$
\begin{aligned}
&\left|E\big((e^{-i(x+y)(Y_1-Y_2)}-e^{-ix(Y_1-Y_2)})\big|Y_2,\cdots,Y_m\big)\right|\\
=&\Big|\exp\Big[i(x+y)Y_2-i(x+y)E(Y_1|Y_2,\cdots,Y_m)-\frac{(x+y)^2}{2\gamma_{11}}\Big]\\
&-\exp\Big[ixY_2-ixE(Y_1|Y_2,\cdots,Y_m)-\frac{x^2}{2\gamma_{11}}\Big]\Big|\\
\le&\Big|\exp\Big[iyY_2-iyE(Y_1|Y_2,\cdots,Y_m)-\frac{(x+y)^2}{2\gamma_{11}}\Big]-e^{-x^2/2\gamma_{11}}\Big|\\
\le&\exp\Big[-\frac{(x+y)^2}{2\gamma_{11}}\Big]\big|\exp\big[iyY_2-iyE(Y_1|Y_2,\cdots,Y_m)\big]-1\big|\\
&+\Big|\exp\Big[-\frac{(x+y)^2}{2\gamma_{11}}\Big]-\exp\Big[-\frac{x^2}{2\gamma_{11}}\Big]\Big|\\
\le&\exp\Big(-\frac{x^2}{2\gamma_{11}}\Big)|y|^\delta\big(|Y_2|^\delta+|E(Y_1|Y_2,\cdots,Y_m)|^\delta\big)\\
&+2\exp\Big(-\frac{x^2}{4\gamma_{11}}\Big)\Big|\frac{y}{\sqrt{\gamma_{11}}}\Big|^\delta\\
\le&\exp\Big(-\frac{x^2}{2\gamma_{11}}\Big)|y|^\delta\Big(|Y_2|^\delta+|E(Y_1|Y_2,\cdots,Y_m)|^\delta+\frac{2}{\gamma_{11}^{\delta/2}}\Big).
\end{aligned}
\tag{2.7.32}
$$

这里我们用到了不等式:

$$
e^{-b^2}-e^{-a^2}\le 2e^{-b^2/2}((a-b)\wedge 1),\quad \forall a\ge b\ge 0.
$$

由 (2.7.32) 和 (2.7.31), 利用引理 2.7.1 我们得

$$
\begin{aligned}
I\le&(2\pi)^{m/2}|R(s_1,\cdots,s_m)|^{-1/2}\exp\Big(-\frac{x^2}{4\gamma_{11}}\Big)|y|^\delta E\Big\{|e^{-iyY_m}-1|\\
&\cdot\Big(|Y_2|^\delta+|E(Y_1|Y_2,\cdots,Y_m)|^\delta+\frac{2}{\gamma_{11}^{\delta/2}}\Big)\Big\}\\
\le&(2\pi)^{m/2}|R(s_1,\cdots,s_m)|^{-1/2}\exp\Big(-\frac{x^2}{4\gamma_{11}}\Big)|y|^{2\delta}E\Big\{|Y_m|^\delta\\
&\cdot\Big(|Y_2|^\delta+|E(Y_1|Y_2,\cdots,Y_m)|^\delta+\frac{2}{\gamma_{11}^{\delta/2}}\Big)\Big\}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\leq&(2\pi)^{m/2}|R(s_1,\cdots,s_m)|^{-1/2}\exp\Big(-\frac{x^2}{4\gamma_{11}}\Big)|y|^{2\delta}(EY_m^2)^{\delta/2}\\
&\cdot\Big((EY_2^2)^{\delta/2}+(EY_1^2)^{\delta/2}+\frac{2}{\gamma_{11}^{\delta/2}}\Big)\\
=&(2\pi)^{m/2}|R(s_1,\cdots,s_m)|^{-1/2}\exp\Big(-\frac{x^2}{4\gamma_{11}}\Big)|y|^{2\delta}\\
&\cdot\Big(\frac{|(\gamma_{ij},1\leq i,j\leq m-1)|}{|(\gamma_{ij},1\leq i,j\leq m)|}\Big)^{\delta/2}\\
&\cdot\Big(\Big(\frac{|(\gamma_{ij},1\leq i,j\leq m;i,j\neq 2)|}{|(\gamma_{ij},1\leq i,j\leq m)|}\Big)^{\delta/2}\\
&+\Big(\frac{|(\gamma_{ij},2\leq i,j\leq m)|}{|(\gamma_{ij},1\leq i,j\leq m)|}\Big)^{\delta/2}+\frac{2}{\gamma_{11}^{\delta/2}}\Big)\\
\leq&3(2\pi)^{m/2}|R(s_1,\cdots,s_m)|^{-1/2}\exp\Big(-\frac{x^2}{4\gamma_{11}}\Big)|y|^{2\delta}\\
&\cdot\Big(\frac{|(\gamma_{ij},1\leq i,j\leq m-1)|}{|(\gamma_{ij},1\leq i,j\leq m)|}\Big)^{\delta/2}\\
&\cdot\Big(\Big(\frac{|(\gamma_{ij},1\leq i,j\leq m;i,j\neq 2)|}{|(\gamma_{ij},1\leq i,j\leq m)|}\Big)^{\delta/2}\\
&+\Big(\frac{|(\gamma_{ij},2\leq i,j\leq m)|}{|(\gamma_{ij},1\leq i,j\leq m)|}\Big)^{\delta/2}\Big). \qquad (2.7.33)
\end{aligned}$$

(2.7.30) 得证. 从而引理 2.7.6 得证.

引理 2.7.7 沿用引理 2.7.6 的概念和假设，我们有

$$\begin{aligned}
&E\sup_x(L(x,t+h)-L(x,t))^m\\
\leq&4\Big(1-\Big(\frac{1}{2}\Big)^{(2\delta-1)/m}\Big)^{-m}m!\int\cdots\int_{t\leq s_1<s_2<\cdots<s_m\leq t+h}\\
&(1+\sqrt{EX^2(s_1)})\cdot|R(s_1,\cdots,s_m)|^{-1/2}\rho_m^{\delta/2}(\rho_1^{\delta/2}+\rho_2^{\delta/2})\\
&\cdot ds_1\cdots ds_m \qquad (2.7.34)
\end{aligned}$$

对任意的 $1/2<\delta\leq 1$, $t\geq 0$, $h>0$ 和偶数 $m\geq 4$ 成立.

证明 显然

$$
\begin{aligned}
&E\sup_x(L(x,t+h)-L(x,t))^m \\
&\quad\le 2^m\sum_{k=-\infty}^{\infty}E(L(k,t+h)-L(k,t))^m \\
&\qquad+2^m\sum_{k=-\infty}^{\infty}E\sup_{0\le y\le 1}(L(k+y,t+h)-L(k+y,t) \\
&\qquad-L(k,t+h)+L(k,t))^m. \qquad (2.7.35)
\end{aligned}
$$

由引理 2.7.4, 我们有

$$
\begin{aligned}
&E(L(k,t+h)-L(k,t))^m \\
&\quad\le\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^{m/2}m!\int\cdots\int_{t\le s_1<s_2<\cdots<s_m\le t+h}\exp\Big(-\frac{k^2}{2EX^2(s_1)}\Big) \\
&\quad\cdot|R(s_1,\cdots,s_m)|^{-1/2}ds_1\cdots ds_m. \qquad (2.7.36)
\end{aligned}
$$

由引理 2.7.6 和 Móricz (1982) 的定理得

$$
\begin{aligned}
&E\sup_{0\le y\le 1}(L(k+y,t+h)-L(k+y,t)-L(k,t+h)+L(k,t))^m \\
&\quad\le 3\cdot 2^{m+1}\Big(1-\Big(\frac{1}{2}\Big)^{(2\delta-1)/m}\Big)^{-m}\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^{m/2}m! \\
&\quad\cdot\int\cdots\int_{t\le s_1<s_2<\cdots<s_m\le t+h}\exp\Big(-\frac{k^2}{4EX^2(s_1)}\Big) \\
&\quad\cdot|R(s_1,\cdots,s_m)|^{-1/2}\rho_m^{\delta/2}(\rho_1^{\delta/2}+\rho_2^{\delta/2})ds_1\cdots ds_m. \qquad (2.7.37)
\end{aligned}
$$

由 (2.7.35), (2.7.36) 和 (2.7.37), 通过一些初等计算即得 (2.7.34).

命题 2.7.3 的证明 由引理 2.7.1 和 2.7.3 得

$$\rho_m\le 2\sigma^{-2}(s_m-s_{m-1}),\quad \rho_1\le 2(EX^2(s_1))^{-1},\quad \rho_2\le 2\sigma^{-2}(s_2-s_1),$$

$$|R(s,\cdots,s_m)|^{-1/2}\le 2^m(EX^2(s_1)\cdot\sigma^2(s_2-s_1)\cdots\sigma^2(s_m-s_{m-1}))^{-1/2}.$$

在引理 2.7.7 中取 $\delta = 2/3$, 沿着命题 2.7.1 的证明路线可得

$$
\begin{aligned}
&E\sup_x(L(x,t+h)-L(x,t))^m \\
&\le 8\cdot 2^m\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1/3m}\right)^{-m} m!(1+\sigma(2)) \\
&\quad \cdot\int\cdots\int_{t\le s_1<s_2<\cdots<s_m\le t+h}\frac{1}{\sigma(s_1)\sigma(s_2-s_1)\cdots\sigma^{5/3}(s_m-s_{m-1})} \\
&\quad \cdot(\sigma^{-2/3}(s_1)+\sigma^{-2/3}(s_2-s_1))ds_1\cdots ds_m \\
&\le 16\cdot 2^m(6m)^m m!(1+\sigma(2))h^m \\
&\quad \cdot\int\cdots\int_{t\le s_1<s_2<\cdots<s_m\le t+h}\Big\{1/\big[\sigma(s_1h)\sigma((s_2-s_1)h)\cdots\sigma^{5/3} \\
&\quad ((s_m-s_{m-1})h)\big]\Big\}\cdot((\sigma^{-2/3}(s_1h)+\sigma^{-2/3}((s_2-s_1)h)ds_1\cdots ds_m \\
&\le 16\cdot 2^m\cdot(6m)^m\cdot m!(1+\sigma(2))\cdot h^m\cdot\sigma(h)^{-m-4/3}c_0^{-m-4/3} \\
&\quad \cdot\int\cdots\int_{0\le s_1<s_2<\cdots<s_m\le 1} s_1^{-\alpha}(s_2-s_1)^{-\alpha}\cdots(s_m-s_{m-1})^{-5\alpha/3} \\
&\quad \cdot(s_1^{-2\alpha/3}+(s_2-s_1)^{-2\alpha/3})ds_1\cdots ds_m \\
&\le 32\cdot 12^m\cdot m^m\cdot m!(h/\sigma(h))^m\cdot c_0^{-m-4/3}\cdot\sigma^{-4/3}(h)\cdot(1+\sigma(2)) \\
&\quad \cdot\frac{\Gamma^{m-2}(1-\alpha)\cdot\Gamma^2(1-\frac{5}{3}\alpha)}{\Gamma(1+m(1-\alpha)-\frac{4}{3}\alpha)} \\
&\le 5000\cdot(1+\sigma(2))c_0^{-8/3}\sigma^{-4/3}(1)h^{-4\alpha/3}\cdot\left(\frac{524h}{c_0\sigma(h)}\right)^m\cdot(m!)^{1+\alpha},
\end{aligned}
$$

在第二个不等式中用到了不等式 $1-2^{-1/(3m)}\ge 1/(6m)$ ($m\ge 4$). (2.7.26) 得证.

对于平稳 Gauss 过程的局部时增量的极大值的矩, 我们有下述估计.

命题 2.7.4 设 $\{X(t);t\ge 0\}$ 为零均值平稳 Gauss 过程且 $EX^2(0)=1$. 假设 $\sigma^2(h)$ 为 $(0,1)$ 上的非降凹函数, 满足条件 (2.7.25). 则对任何偶数 $m\ge 4$ 和 $0<h\le 1$, $0\le t\le 1$ 有

$$
E\sup_x(L(x,t+h)-L(x,t))^m\le C_2\cdot h^{-(1/3)\alpha}\left(\frac{262h}{c_0\sigma(h)}\right)^m(m!)^{1+\alpha}, \tag{2.7.38}
$$

其中 $C_2 = 10^4 c_0^{-8/3}\sigma^{-1/3}(1)$.

证明与命题 2.7.3 的类似，从略.

2.7.2 Gauss 过程局部时的增量

现在我们对具有平稳增量的 Gauss 过程和平稳 Gauss 过程，给出类似于 (2.7.5) 和 (2.7.7) 的结论.

定理 2.7.2 设 a_T 和 b_T 为 $T \geq 0$ 的非负函数. 记 $a^* = \sup_{T\geq 0} a_T$. 设 $\{X(t); t\geq 0\}$ 为零均值且具有平稳增量的 Gauss 过程. 假设 $X(0)=0$, $\sigma^2(h)$ 为 $(0,a^*)$ 上的非降连续凹函数. 还假设存在常数 $0<\alpha\leq 1/2$ 和 $c_0>0$ 使得

$$\sigma(ah) \geq c_0 a^\alpha \sigma(h) \quad \forall 0\leq a\leq 1, 0<h\leq a^*. \tag{2.7.39}$$

又假设

$$\frac{1+b_T}{a_T} \to \infty, \quad T\to\infty. \tag{2.7.40}$$

则

$$\limsup_{T\to\infty} \sup_{0\leq t\leq b_T} \frac{L(x,t+a_T)-L(x,t)}{a_T\left(\log \frac{b_T}{a_T} + \log\log(a_T+\frac{1}{a_T})\right)^\alpha/\sigma(a_T)} \leq \frac{160}{c_0} \quad \text{a.s.} \tag{2.7.41}$$

证明定理 2.7.2 之前，我们先给出几个直接的推论.

推论 2.7.1 设 $\{X(t); t\geq 0\}$ 为一个零均值、具有平稳增量的 Gauss 过程. 假设 $X(0)=0$, $\sigma^2(h)$ 为 $(0,1)$ 上的非降连续凹函数，对某 $0<\alpha\leq 1/2$ 和 $c_0>0$ 满足

$$\sigma(ah) \geq c_0 a^\alpha \sigma(h) \quad \forall 0\leq a,h\leq 1. \tag{2.7.42}$$

则

$$\limsup_{h\to 0} \frac{L(0,h)}{h(2\log\log(1/h))^\alpha/\sigma(h)} \leq \frac{160}{c_0} \quad \text{a.s.}, \tag{2.7.43}$$

$$\limsup_{h\to 0} \sup_{0\leq t\leq 1} \frac{L(0,t+h)-L(0,t)}{h(2\log(1/h))^\alpha/\sigma(h)} \leq \frac{160}{c_0} \quad \text{a.s.} \tag{2.7.44}$$

推论 2.7.2 设 $\{Z(t);t\geq 0\}$ 为一个阶为 α 的分数 Wiener 过程，$0<\alpha\leq 1/2$，即它是一个零均值、具有平稳增量的 Gauss 过程且 $\sigma^2(h)=h^{2\alpha}$. 则

$$\limsup_{h\to 0}\frac{L(0,h)}{h^{1-\alpha}(2\log\log(1/h))^{\alpha}}\leq 200\quad \text{a.s.},\tag{2.7.45}$$

$$\limsup_{h\to 0}\sup_{0\leq t\leq 1}\frac{L(0,t+h)-L(0,t)}{h^{1-\alpha}(2\log(1/h))^{\alpha}}\leq 200\quad \text{a.s.}\tag{2.7.46}$$

注 2.7.1 考察 $\alpha=1/2$ 的情形，即 $Z(\cdot)$ 为标准 Wiener 过程，具有局部时 $l(x,t)$. 根据 Kesten (1965) 得到的重对数律 (参见 (2.7.9))，我们有

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{l(0,T)}{(2T\log\log T)^{1/2}}=1\quad \text{a.s.}\tag{2.7.47}$$

利用 Kesten (1965) 的方法，我们也可以证明

$$\limsup_{h\to 0}\frac{l(0,h)}{(2h\log\log(1/h))^{1/2}}=1\quad \text{a.s.}\tag{2.7.48}$$

这意味着在 (2.7.45) 中我们得到的上界的阶是最佳的.

现在来证明定理 2.7.2. 我们需要一些引理.

引理 2.7.8 在定理 2.7.2 的假设下，对任何 $0<h\leq a^*$，$y>0$，$x\in\mathcal{R}$ 有

$$P\left\{L(x,t+h)-L(x,t)\geq\frac{16h}{c_0\sigma(h)}y\right\}\leq\frac{K_\alpha\exp\{-x^2/(2\sigma^2(t+h))\}}{(\exp(y^{1/\alpha}/4)-1)^{2\alpha}},\tag{2.7.49}$$

其中 K_α 为只依赖于 α 的正常数.

证明 由命题 2.7.1 和下述引理立即可得.

引理 2.7.9 设 ξ 为非负随机变量. 假设对某 $C>0$, $\alpha>0$ 和任何 $m\geq 2$ 成立

$$E\xi^m\leq C(m!)^{\alpha}.$$

则对任何 $y>0$ 有

$$P\{\xi>y\}\le\frac{K_\alpha C}{(\exp(y^{1/\alpha}/4)-1)^{2\alpha}},\qquad(2.7.50)$$

其中 K_α 为只依赖于 α 的正常数.

证明 当 $0<y\le 2^\alpha$ 时，由 Chebyshev 不等式得

$$P\{\xi>y\}\le\frac{E\xi^2}{y^2}\le\frac{K_\alpha C}{(\exp(y^{1/\alpha}/4)-1)^{2\alpha}}.$$

当 $y>2^\alpha$ 时，令 $m=[y^{1/\alpha}]$. 由 Stirling 公式和 Chebyshev 不等式得

$$\begin{aligned}P\{\xi>y\}\le&\frac{E\xi^m}{y^m}\le\frac{C(m!)^\alpha}{y^m}\\ \le&\frac{C(3m(m/e)^m)^\alpha}{y^m}\le C(3y^{1/\alpha})^\alpha e^{-m\alpha}\\ \le&C3^\alpha y\exp\{-(y^{1/\alpha}-1)\alpha\}\le K_\alpha C\exp(-y^{1/\alpha}/2)\\ \le&K_\alpha C(\exp(y^{1/\alpha}/4)-1)^{-2\alpha}.\end{aligned}$$

引理得证.

定理 2.7.2 的证明 令 $1<\theta<\frac{5}{4}$. 定义

$$\begin{aligned}&A_k=\{T:\theta^k<a_T\le\theta^{k+1}\},\quad -\infty<k<\infty,\\ &A_{k,j}=\left\{T:\theta^j\le\frac{b_T+a_T}{\theta^k}<\theta^{j+1},T\in A_k\right\},\quad j=0,1,\cdots,\\ &\beta_T=\log\frac{b_T}{a_T}+\log\log\left(a_T+\frac{1}{a_T}\right).\end{aligned}$$

易知

$$\beta_T\ge\beta_{k,j}:=\log\theta^j+\log\log\theta^{|k|},\quad T\in A_{k,j}.$$

注意到对每个固定的 x, $L(x,t)$ 为 t 的非降函数，我们有

$$\begin{aligned}&\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le b_T}\frac{L(x,t+a_T)-L(x,t)}{a_T\beta_T^\alpha/\sigma(a_T)}\\ \le&\limsup_{|k|+j\to\infty}\sup_{l\ge j}\sup_{T\in A_{k,l}}\sup_{0\le t\le b_T}\frac{\sigma(a_T)(L(x,t+a_T)-L(x,t))}{a_T\beta_T^\alpha}\end{aligned}$$

$$\leq \limsup_{|k|+j\to\infty} \sup_{l\geq j} \sup_{T\in A_{k,l}} \sup_{0\leq t\leq(\theta^{l+1}-1)\theta^k} \frac{\sigma(\theta^{k+1})(L(x,t+\theta^{k+1})-L(x,t))}{\theta^k\beta_{k,l}^\alpha}$$

$$\leq 2\limsup_{|k|+j\to\infty} \sup_{l\geq j} \max_{0\leq m\leq\theta^l} \frac{\sigma(\theta^{k+1})(L(x,(m+1)\theta^{k+1})-L(x,m\theta^{k+1}))}{\theta^k\beta_{k,l}^\alpha}. \tag{2.7.51}$$

利用引理 2.7.8 得

$$P\Big\{\sup_{l\geq j}\max_{0\leq m\leq\theta^l}\big[\sigma(\theta^{k+1})(L(x,(m+1)\theta^{k+1})-L(x,m\theta^{k+1}))\big]/\big[\theta^k\beta_{k,l}^\alpha\big]$$

$$\geq \theta\Big(\frac{2\theta}{\alpha}\Big)^\alpha\frac{16}{c_0}\Big\}\leq \sum_{l=j}^{\infty}\sum_{m=0}^{[\theta^l]}K_\alpha e^{-\theta\beta_{k,l}}\leq C\sum_{l=j}^{\infty}\theta^{l(\theta-1)}\log^{-\theta}\theta^{|k|}$$

$$\leq C\theta^{j(\theta-1)}(|k|+1)^{-\theta}, \tag{2.7.52}$$

其中 C 为只依赖于 θ 和 α 的常数. 由 (2.7.51), (2.7.52) 和 Borel-Cantelli 引理得

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\leq t\leq b_T}\frac{\sigma(a_T)(L(x,t+a_T)-L(x,t))}{a_T\beta_T^\alpha}$$

$$\leq \frac{32}{c_0}\theta(2\theta/\alpha)^\alpha\leq\frac{160}{c_0}\theta^2 \quad \text{a.s.}$$

从而

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\leq t\leq b_T}\frac{\sigma(a_T)(L(x,t+a_T)-L(x,t))}{a_T\beta_T^\alpha}\leq\frac{160}{c_0}\quad \text{a.s.},$$

(2.7.41) 得证.

与引理 2.7.8 类似, 由引理 2.7.9 和命题 2.7.2 可得

引理 2.7.10 *在命题 2.7.2 中的假设下, 对任何 $0<h\leq h_0$, $t\geq 0$, $y>0$ 成立*

$$P\Big\{L(x,t+h)-L(x,t)\geq\frac{16h}{c_0\sigma(h)}y\Big\}\leq\frac{K_\alpha\exp(-x^2/2)\cdot\sigma(h)}{(\exp(y^{1/\alpha}/4)-1)^{2\alpha}},$$

其中 K_α 为只依赖于 α 的正常数.

用引理 2.7.10 代替引理 2.7.8, 沿着定理 2.7.2 的证明路线，我们可得下述关于平稳 Gauss 过程局部时的轨道性质的定理.

定理 2.7.3 设 b_h 是 $(0,1)$ 上的 h 的函数，$\{X(t);\, t\geq 0\}$ 为零均值平稳 Gauss 过程且 $EX^2(0)=1$. 假设 $\sigma^2(h)$ 为 $(0,1)$ 上的非降连续凹函数，且对某 $0<\alpha\leq 1/2$, $c_0>0$ (2.7.42) 成立. 则对每个 $x\in\mathcal{R}$ 有

$$\limsup_{h\to 0}\sup_{0\leq t\leq b_h}\frac{L(x,t+h)-L(x,t)}{(h/\sigma(h))\beta_h^\alpha}\leq\frac{160}{c_0}\quad \text{a.s.},\tag{2.7.53}$$

其中

$$\beta_h=\log\Big(1+\Big(\frac{h+b_h}{h}\Big)\sigma(h)\log^{3/2}\frac{1}{h}\Big).\tag{2.7.54}$$

下面是一些直接的推论:

推论 2.7.3 在定理 2.7.3 的假设下, 对任何 $x\in\mathcal{R}$, $0\leq\theta\leq 1$ 成立

$$\limsup_{h\to 0}\sup_{0\leq t\leq h^\theta}\frac{L(x,t+h)-L(x,t)}{(h/\sigma(h))\log^\alpha(1+h^{\theta-1}\sigma(h)\log^{3/2}(1/h))}\leq\frac{160}{c_0}\quad \text{a.s.},\tag{2.7.55}$$

$$\limsup_{h\to 0}\frac{L(x,h)}{h\sigma^{\alpha-1}(h)\log^{2\alpha}(1/h)}=0\quad \text{a.s.}\tag{2.7.56}$$

推论 2.7.4 设 $\{X(t);t\geq 0\}$ 为零均值平稳 Gauss 过程满足 $EX^2(0)=1$. 假设 $\sigma^2(h)$ 为 $(0,1)$ 上的非降连续凹函数，满足对某 $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$, $c_1,c_0>0$ 和任何 $0<h\leq 1$, $c_1h^\alpha\leq\sigma(h)\leq c_0h^\alpha$ 成立. 则对任何 $x\in\mathcal{R}$, $0\leq\theta\leq 1$ 有

$$\limsup_{h\to 0}\sup_{0\leq t\leq h^\theta}\frac{L(x,t+h)-L(x,t)}{h^{1+\alpha(\theta-2+\alpha)}\log^{2\alpha}(1/h)}=0\quad \text{a.s.}\tag{2.7.57}$$

推论 2.7.5 设 $\{X(t);t\geq 0\}=\{\sum_{k=1}^{\infty}X_k(t);t\geq 0\}$, 其中 $\{X_k(t);t\geq 0\}$ 为独立的 O-U 过程, 其系数为 $\gamma_k\geq 0$, $\lambda_k>0$. 假设 $\Gamma_0=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k/\lambda_k=1$, 并且 (2.7.42) 对某 $0<\alpha\leq 1/2$, $c_0>0$ 成立. 则 (2.7.55) 和 (2.7.56) 成立. 特别地, 对每个 $x\in\mathcal{R}$, $0\leq\theta\leq 1$ 有

$$\limsup_{h\to 0}\sup_{0\leq t\leq h^{\theta}}\frac{L(x,t+h)-L(x,t)}{(h/\sigma(h))\log^{1/2}(1+h^{\theta-1}\sigma(h)\log^{3/2}(1/h))}\leq\frac{160}{c_0}\quad\text{a.s.},\tag{2.7.58}$$

$$\limsup_{h\to 0}\frac{L(x,h)}{h\sigma^{-1/2}(h)\log(1/h)}=0\quad\text{a.s.}\tag{2.7.59}$$

注 2.7.2 比较 (2.7.48) 和 (2.7.59), 我们发现具有平稳增量且 $X(0)=0$ 的 Gauss 过程局部时的极限性质与平稳 Gauss 过程局部时的极限性质完全不同.

2.7.3 Gauss 过程局部时的最大连续模

设 $\{X(t);t\geq 0\}$ 为一个零均值、具有平稳增量的 Gauss 过程. 我们来研究 $L(x,t)$ 关于 $x\in\mathcal{R}$ 的最大值对变量 $t\geq 0$ 的连续模. 下述结果类似于 (2.7.6).

定理 2.7.4 设 $\{X(t);t\geq 0\}$ 为零均值、具有平稳增量的 Gauss 过程且 $X(0)=0$, $L(x,t)$ 为 $X(\cdot)$ 的局部时. 记 $\sigma^2(h)=E(X(t+h)-X(t))^2$. 假设 $\sigma^2(h)$ 为 $(0,1)$ 上的非降连续凹函数, 并且存在常数 $0<\alpha\leq 1/2$ 和 $c_0>0$ 使得

$$\sigma(ah)\geq c_0a^{\alpha}\sigma(h)\quad\forall 0<a,h\leq 1.\tag{2.7.60}$$

则

$$\limsup_{h\to 0}\sup_{0\leq t\leq 1}\sup_{-\infty<x<\infty}\frac{L(x,t+h)-L(x,t)}{h(\log(1/h))^{\alpha+1}/\sigma(h)}\leq\frac{524(3+4\alpha)^{\alpha+1}}{c_0}\quad\text{a.s.}\tag{2.7.61}$$

定理 2.7.5 设 $\{X(t); t \geq 0\}$ 为零均值平稳 Gauss 过程且 $EX^2(0) = 1$. 假设 $\sigma^2(h)$ 为 $(0,1)$ 上的非降连续凹函数, 对某 $0 < \alpha \leq 1/2$ 和 $c_0 > 0$, (2.7.60) 成立. 则 (2.7.61) 成立.

定理 2.7.4 和 2.7.5 的证明依赖于下述两个引理, 通过利用命题 2.7.3 (对应地, 命题 2.7.4) 代替命题 2.7.1, 它们的证明与引理 2.7.8 的类似.

引理 2.7.11 在定理 2.7.4 的假设下, 对任何 $y > 1$, $0 \leq t, h \leq 1$ 成立

$$P\Big\{\sup_x (L(x,t+h) - L(x,t)) > y\frac{524h}{c_0\sigma(h)}\Big\}$$
$$\leq K_\alpha C_1\, h^{-4\alpha/3} \exp(-y^{1/(1+\alpha)}/2), \tag{2.7.62}$$

其中 C_1 如命题 2.7.3 所示, K_α 是只依赖于 α 的正常数.

引理 2.7.12 在定理 2.7.5 的假设下, 对任何 $y > 1$, $0 \leq t, h \leq 1$ 有

$$P\Big\{\sup_x (L(x,t+h) - L(x,t)) > y\frac{524h}{c_0\sigma(h)}\Big\}$$
$$\leq K_\alpha C_2\, h^{-\alpha/3} \exp(-y^{1/(1+\alpha)}/2), \tag{2.7.63}$$

其中 C_2 如命题 2.7.4 所示, K_α 是只依赖于 α 的正常数.

定理 2.7.4 的证明 令 $1 < \theta < 5/4$. 则

$$\limsup_{h\to 0} \sup_{0\leq t\leq 1} \sup_x \frac{L(x,t+h) - L(x,t)}{(h/\sigma(h))(\log(1/h))^{\alpha+1}}$$
$$\leq \limsup_{k\to\infty} \sup_{\theta^{-k-1}\leq h\leq \theta^k} \sup_{0\leq t\leq 1} \sup_x \frac{L(x,t+h) - L(x,t)}{(h/\sigma(h))(\log(1/h))^{\alpha+1}}$$
$$\leq \limsup_{k\to\infty} \sup_{0\leq t\leq 1} \sup_x \frac{L(x,t+\theta^{-k}) - L(x,t)}{(\theta^{-k-1}/\sigma(\theta^{-k}))(\log\theta^k)^{\alpha+1}}$$
$$\leq 2\theta \limsup_{k\to\infty} \max_{0\leq j\leq \theta^k} \sup_x \frac{L(x,(j+1)\theta^{-k}) - L(x,j\theta^{-k})}{(\theta^{-k}/\sigma(\theta^{-k}))(\log\theta^k)^{\alpha+1}}. \tag{2.7.64}$$

由 (2.7.62) 得

$$P\left\{\max_{0\le j\le\theta^k}\sup_x \frac{L(x,(j+1)\theta^{-k})-L(x,j\theta^{-k})}{(\theta^{-k}/\sigma(\theta^{-k}))(\log\theta^k)^{\alpha+1}} \ge \frac{524}{c_0}((3+4\alpha)\theta)^{1+\alpha}\right\}$$
$$\le K_\alpha(\theta^k+1)C_1\cdot\theta^{4\alpha/3}\exp[-(3+4\alpha)\log\theta^k/2] \le K\theta^{-k(\theta-1)}.$$

从而，由 Borel-Cantelli 引理得

$$\limsup_{k\to\infty}\sup_{0\le j\le\theta^k}\sup_x \frac{L(x,(j+1)\theta^{-k})-L(x,j\theta^{-k})}{(\theta^{-k}/\sigma(\theta^{-k}))(\log\theta^k)^{\alpha+1}}$$
$$\le \frac{524}{c_0}((3+4\alpha)\theta)^{1+\alpha} \quad \text{a.s.} \tag{2.7.65}$$

由 (2.7.64) 和 (2.7.65), 并令 θ 充分接近于 1, (2.7.61) 得证.

定理 2.7.5 的证明 证明与定理 2.7.4 的类似，从略.

注 2.7.3 设 $\{W(t);t\ge 0\}$ 为标准 Wiener 过程，其局部时为 $l(x,t)$. 由 (2.7.61) 我们得

$$\limsup_{h\to 0}\sup_{0\le t\le 1}\sup_x \frac{l(x,t+h)-l(x,t)}{h^{1/2}(\log(1/h))^{3/2}} \le 262(48)^{3/2} \quad \text{a.s.}$$

比较这一结果和 (2.7.6), 我们发现结论 (2.7.61) 可能不是最好的. 我们相信在定理 2.7.4 和定理 2.7.5 的条件下， (2.7.61) 可由下式代替：对某个常数 c_0^*,

$$\limsup_{h\to 0}\sup_{0\le t\le 1}\sup_x \frac{L(x,t+h)-L(x,t)}{(h/\sigma(h))(\log(1/h))^{\alpha}} \le c_0^* \quad \text{a.s.}$$

第三章　无穷维 Gauss 过程的连续模和大增量

§3.1　l^p 值 Gauss 过程的连续性

对于无穷维 Gauss 过程的研究，不仅有理论上的兴趣，也有很强的实际背景. 在 §2.1 的第 5 小节中，作为一类随机微分方程无穷组列的解，我们已经引入了无穷维 Ornstein-Uhlenbeck (O-U) 过程. 在这一章中我们将研究这一类过程的连续性、连续模和大增量，并将有关结果推广到较一般的无穷维 Gauss 过程.

设 $\{Y(t); -\infty < t < \infty\} = \{X_k(t); -\infty < t < \infty\}_{k=1}^{\infty}$ 是独立的平稳 Gauss 过程序列， $\mathrm{E}X_k(t) = 0$, $\sigma_k^2(h) = \mathrm{E}(X_k(t+h) - X_k(t))^2$, 其中对每一 $k \geq 1$, $\sigma_k(h)$ 是非降连续函数. 首先，我们假设 $X_k(\cdot)$ 是具有参数 $\gamma_k \geq 0$ 和 $\lambda_k > 0$ 的 O-U 过程，即 $X_k(\cdot)$ 是一平稳、零均值 Gauss 过程且具有 $\mathrm{E}X_k(s)X_k(t) = (\gamma_k/\lambda_k)\exp\{-\lambda_k|t-s|\}$ 和

$$\sigma_k^2(h) := \mathrm{E}(X_k(t+h) - X_k(t))^2 = \frac{2\gamma_k}{\lambda_k}(1 - e^{-\lambda_k h}), \quad h > 0. \quad (3.1.1)$$

(3.1.1) 可推出

$$(2/e)\gamma_k(\lambda_k^{-1} \wedge h) \leq \sigma_k^2(h) \leq 2\gamma_k(\lambda_k^{-1} \wedge h). \quad (3.1.2)$$

在本节中，我们将研究 $p \geq 1$ 时在空间 l^p 中 $Y(\cdot)$ 的连续性.

3.1.1　l^2 值 O-U 过程

首先我们引述下列不等式 (参见 Iscoe 等 1990), 它可从定理 2.1.6 和推论 2.1.2 得到：存在 $0 < c_p \leq C_p < \infty$ 使得

$$c_p\Big\{E\|Y(0)\|_{l^p}+\sup_{\|\{y_k\}\|_{l^q}\le 1}\int_0^{1/2}\frac{(\sum_{k=1}^{\infty}y_k^2\sigma_k^2(u))^{1/2}}{u(\log(1/u))^{1/2}}du\Big\}$$
$$\le E\sup_{t\in[0,1]}\|Y(t)\|_{l^p}$$
$$\le C_p\Big\{E\|Y(0)\|_{l^p}+\sup_{\|\{y_k\}\|_{l^q}\le 1}\int_0^{1/2}\frac{(\sum_{k=1}^{\infty}y_k^2\sigma_k^2(u))^{1/2}}{u(\log(1/u))^{1/2}}du\Big\},\tag{3.1.3}$$

其中 $1/p+1/q=1$.

先来考察 $p=2$ 的情形. 对 $x\ge 0$, 记 $K(x)=\{k\in\mathcal{N};\gamma_k>\lambda_k x\}$, $\lambda(x)=\sup\{\lambda_k;k\in K(x)\}$, 当 $K(x)$ 是空集时, 令 $\lambda(x)=0$. 下述定理是 Fernique(1989) 得到的.

定理 3.1.1 *在 l^2 中 $Y(\cdot)$ 是 a.s. 连续的当且仅当 $\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k/\lambda_k<\infty$ 且*

$$\int_0^{\infty}\log^+(\lambda(x))dx<\infty.$$

证明 我们先证充分性. 对任给的 $\delta>0,\rho>0$ 和整数 $N>0$, 写

$$P\Big\{\sup_{|t-s|\le\delta,s,t\in[0,1]}\|Y(t)-Y(s)\|_{l^2}\ge 3\rho\Big\}$$
$$\le P\Big\{\sup_{|t-s|\le\delta,s,t\in[0,1]}\Big(\sum_{k\le N}|X_k(t)-X_k(s)|^2\Big)^{1/2}\ge\rho\Big\}$$
$$+2P\Big\{\sup_{t\in[0,1]}\sum_{k>N}X_k(t)^2\ge\rho\Big\}.\tag{3.1.4}$$

因为 O-U 过程是连续的, 故当 $\delta\to 0$ 时 (3.1.4) 右边第一项趋于 0. 为估计 (3.1.4) 右边第二个概率, 我们运用 (3.1.3), 但此时我们考察 $k\ge N$ 代替 $k\ge 1$. 对应于 $\mathrm{E}\|Y(0)\|_{l^2}$, 对任给 $\epsilon>0$, 当 $N=N(\epsilon)$ 充分大时有

$$\sum_{k\ge N}\mathrm{E}X_k(0)^2=\sum_{k\ge N}\gamma_k/\lambda_k<\varepsilon.\tag{3.1.5}$$

在 (3.1.3) 的积分中记 $x=(\log u^{-1})^{1/2}$ 并注意到 (3.1.2), 适当调整常数 c_p 的 C_p, 我们可用如下积分代替该积分

$$M(y):=\int_{\log 2}^{\infty}\Big(\sum_{k\geq N}y_k^2\gamma_k(\lambda_k^{-1}\wedge e^{-x^2})\Big)^{1/2}dx$$

其中 $y=(y_1,y_2,\ldots)$. 显然

$$M(y)=M_1(y)+M_2(y),$$

其中

$$M_1(y)=\int_{\log 2}^{\infty}\Big(\sum_{k\geq N}y_k^2\gamma_k\lambda_k^{-1}I(\lambda_k>e^{x^2})\Big)^{1/2}dx,$$

$$M_2(y)=\int_{\log 2}^{\infty}\Big(\sum_{k\geq N}y_k^2\gamma_k e^{-x^2}I(\lambda_k\leq e^{x^2})\Big)^{1/2}dx.$$

设 B 是 l^2 中的单位球. 易知

$$\sup_{y\in B}M_2(y)\leq\sum_{k\geq N}\gamma_k/\lambda_k<\varepsilon. \tag{3.1.6}$$

因此只要估计 $M_1(y)$ 即可. 对 $j=\ldots,-1,0,1,\ldots$, 令

$$K_j=\{k:2^{-j-1}<\gamma_k/\lambda_k\leq 2^{-j}\},\ \lambda_j^*=\sup_{k\in K_j}\lambda_k,$$

$$J:=J(N)=\sup\Big\{j:\sup_{k\geq N}\gamma_k/\lambda_k\leq 2^{-j}\Big\}.$$

那么由条件 $\int_{-\infty}^{\infty}\log^+(\lambda(x))dx<\infty$, 当 N 充分大 (因此 J 也充分大) 时

$$\begin{aligned}\sup_{y\in B}M_1(y)&\leq\sup_{y\in B}\int_{\log 2}^{\infty}\Big(\sum_{j\geq J}2^{-j}\sum_{k\in K_j}y_k^2I(\lambda_j^*>e^{x^2})\Big)^{1/2}dx\\&\leq\sup_{z\in B}\int_{\log 2}^{\infty}\sum_{j\geq J}2^{-j/2}|z_j|I(\lambda_j^*>e^{x^2})dx\\&\leq\sup_{z\in B}\sum_{j\geq J}2^{-j/2}(\log^+\lambda_j^*)^{1/2}|z_j|\\&\leq\Big(\sum_{j\geq J}2^{-j}\log^+\lambda_j^*\Big)^{1/2}<\varepsilon.\end{aligned}\tag{3.1.7}$$

结合 (3.1.5)—(3.1.7) 选取 N 充分大， (3.1.4) 右边可任意小. 因此我们推得在 l^2 中 $Y(\cdot)$ a.s. 连续.

其次, 我们来证必要性. 假设在 l^2 中 $Y(\cdot)$ 是 a.s 连续的. 则它是 a.s. 局部有界的. 由定理 2.1.1, 我们有 $E\sup_{t\in[0,1]}\|Y(t)\|_{l^2}<\infty$. 因此由 (3.1.3) 可得

$$E\|Y(0)\|_{l^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k/\lambda_k<\infty, \qquad L:=\sup_{y\in B}L(y)<\infty, \tag{3.1.8}$$

其中

$$L(y)=\int_0^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}y_k^2\gamma_k(\lambda_k^{-1}\wedge e^{-x^2})\Big)^{1/2}dx. \tag{3.1.9}$$

令 $H_n=\{k:\exp(n^2)\le\lambda_k<\exp((n+1)^2)\}$, $s_n=\sup_{k\in H_n}\gamma_k/\lambda_k$, $z_n^2=\sum_{k\in H_n}y_k^2$. 那么

$$\begin{aligned}
L_1(y):&=\int_0^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}y_k^2\gamma_k\lambda_k^{-1}I(\lambda_k>e^{x^2})\Big)^{1/2}dx\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}y_k^2\gamma_k\lambda_k^{-1}I(\lambda_k>e^{x^2})\Big)^{1/2}dx\\
&\ge\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{m\ge n}\sum_{k\in H_m}y_k^2\gamma_k\lambda_k^{-1}\Big)^{1/2}=:L_1'(y).
\end{aligned}$$

$$L_1'(y)\le\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{m\ge n}z_m^2s_m\Big)^{1/2}.$$

另一方面, 对任一 $z'\in B$, 若定义 $k_m=\sup\{k:\gamma_k/\lambda_k=s_m,k\in H_m\}$, 且对 $k\in H_m$, 设 $y'_{k_m}=z'_m$, $y'_k=0$, $k\ne k_m$, 则 $y'=(y'_1,y'_2,\ldots)\in B$. 因此我们有

$$\sup_{y\in B}L_1(y)\ge\sup_{y\in B}L_1'(y)=\sup_{z\in B}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{m\ge n}z_m^2s_m\Big)^{1/2}=:L_2(s).$$

我们可设 $\{s_m\}$ 是递减的, 不然的话存在一递减的序列 $\{s'_m\}$, 使

得 $s_m \le s'_m$ 且 $L_2(s) = L_2(s')$. 设 $z_m^2 = ms_m / \sum_{k=1}^{\infty} ks_k$. 则

$$\begin{aligned} L_2(s)^2 &\ge \left(\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{m\ge n} ms_m^2\Big)^{1/2}\right)\Big(\sum_{k=1}^{\infty} ks_k\Big)^{-1/2} \\ &\ge \left(\sum_{n=1}^{\infty}\Big(n\sum_{m=n}^{2n-1} s_m^2\Big)^{1/2}\right)\Big(\sum_{k=1}^{\infty} ks_k\Big)^{-1/2} \\ &\ge \Big(\sum_{n=1}^{\infty} ns_{2n-1}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{\infty} ks_k\Big)^{-1/2} \ge \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} ns_n\Big)^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

注意到由 (3.1.8) 有 $L_2(s) < \infty$, 我们得

$$\sum_{n=1}^{\infty} ns_n < \infty. \tag{3.1.11}$$

现在我们来证

$$\int_0^{\infty} \log^+(\lambda(x))dx < \infty. \tag{3.1.12}$$

显然由 (3.1.8) 可得 $\sup_{k\ge 1} \gamma_k/\lambda_k < \infty$. 注意到 $\lambda(x)$ 是非增的函数, 因此当 $x > \sup_{k\ge 1} \gamma_k/\lambda_k$ 时 $\lambda(x) = 0$. 记 $x_0 = \sup\{x : \lambda(x) > e\}$, 则 $x_0 < \infty$. 故为证 (3.1.12) 只需证明

$$\int_0^{x_0} \log(\lambda(x))dx < \infty. \tag{3.1.13}$$

若 $\sup_{k\ge 1} \lambda_k < \infty$, 此时 $\lambda(x)$ 是有界的, 易见 (3.1.13) 正确. 若 $\sup_{k\ge 1} \lambda_k = \infty$, 则当 $x \to 0$ 时 $\lambda(x) \to \infty$. 令 $y = \log \lambda(x)$, 则 $x = \lambda^{-1}(e^y)$. 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^{x_0} \log(\lambda(x))dx &= x\log(\lambda(x))\Big|_0^{x_0} - \int_0^{x_0} xd\log\lambda(x) \\ &= \lambda^{-1}(e^y)y\Big|_{\infty}^{1} + \int_1^{\infty} \lambda^{-1}(e^y)dy. \end{aligned}$$

此时我们有

$$y\lambda^{-1}(e^y) \to 0 \quad 当 \quad y \to \infty \text{ 时},$$

且由 (3.1.11)

$$\int_1^\infty \lambda^{-1}(e^y)dy = \sum_{n=1}^\infty \int_{n^2}^{(n+1)^2} \lambda^{-1}(e^y)dy$$
$$\leq \sum_{n=1}^\infty((n+1)^2 - n^2) \max_{k\in H_n} \gamma_k/\lambda_k$$
$$\leq 2\sum_{n=1}^\infty(n+1)s_n < \infty.$$

综合这些结果我们得 (3.1.13). 必要性得证. 定理 3.1.1 证毕.

利用这一定理, 我们可给出在 l^2 中 $Y(\cdot)$ 连续的若干充分条件. 其中之一如下:

推论 3.1.1 *假若*

$$\sum_{k=1}^\infty(\gamma_k/\lambda_k)(1+\log^+\lambda_k) < \infty,$$

那么 $Y(\cdot)$ 在 l^2 中连续.

注 3.1.1 Fernique (1990a) 将定理 3.1.1 推广至 $p \geq 2$ 的情形 : 在 l^p $(p \geq 2)$ 中, $Y(\cdot)$ 是 a.s. 连续的当且仅当

$$\sum_{k=1}^\infty(\gamma_k/\lambda_k)^{p/2} < \infty,$$

$$\int_0^\infty x^{p/2-1}(\log^+\lambda(x))^{p/2}dx < \infty.$$

3.1.2 l^p 值 O-U 过程

在本小节中我们将利用 Dirichlet 型理论来得出在 l^p $(p \geq 1)$ 中 $Y(\cdot)$ 具有连续样本轨道的条件. 过程 $Y(\cdot)$ 有状态空间 $\mathcal{R}^\infty$ 且有不变测度

$$m = \prod_{k=1}^\infty N(0, \gamma_k/\lambda_k).$$

$\mathcal{R}^\infty$ 中的点记作 $x=(x_1,x_2,\ldots)$. 与过程 $Y(\cdot)$ 相关的 Dirichlet 型 $\mathcal{E}$ 由定义在 $L^2(Y,P)$ 上的下列双线性型的闭包给出:

$$\mathcal{E}(u,v)=\frac{1}{2}\int\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\Big(\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big)\Big(\frac{\partial v}{\partial x_k}\Big)dm,$$

其中

$$u,v\in\mathcal{D}(\mathcal{E}):=\{u\in L^2;\,u=\varphi(x_1,\ldots,x_k),\,\varphi\in C_0^\infty(\mathcal{R}^k),\,k\geq 1\},$$

$C_0^\infty(\mathcal{R}^k)$ 是 $\mathcal{R}^k$ 上具有紧支撑的、且有任意阶连续导数的连续函数空间. 为证 $Y(\cdot)$ 的连续性我们需要下述 Fukushima (1980) 的引理. 在 $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ 上由 $\mathcal{E}_1(u,v)=\mathcal{E}(u,v)+(u,v)_{L^2}$ 定义型 $\mathcal{E}_1$.

引理 3.1.1 每个 $u\in\mathcal{D}(\mathcal{E})$ 有一拟连续 (quasi-continuous) 修正 $\tilde{u}$ 使得

$$P\{\text{ 映射}t\to\tilde{u}(Y(t))\text{ 是连续的}\}=1.$$

进一步, 若在 $\mathcal{E}_1$ 型中 $u_n\to u$, 则对每一 $T>0$ 存在一个子列 $\{u_{n_k}\}$ 使得

$$P\{\text{在}[0,T]\text{上},\tilde{u}_{n_k}(Y(t))\text{ 一致收敛于}\tilde{u}(Y(t))\}=1.$$

下列结果是 Schmuland (1990) 得到的. 定义

$$\delta_k=4^{p/2}\Big(\gamma_k/\lambda_k\Big)^{p/2}\log^{p/2}\Big(\gamma_k\Big(\gamma_k/\lambda_k\Big)^{p/2-1}\vee e\Big).$$

定理 3.1.2 若 $\sum_{k=1}^\infty\delta_k<\infty$, 则在 l^p 中 $Y(\cdot)$ a.s. 连续.

证明 由假设知 $\sum_{k=1}^\infty(\gamma_k/\lambda_k)^{p/2}<\infty$, 这就推出 $Y(\cdot)\in l^p$ a.s. 定义

$$u_n=\sum_{k=1}^n|x_k(t)|^p\vee\delta_k.$$

函数 u_n 属于闭的型 $\mathcal{E}$ 的定义域，且

$$\frac{\partial u_n(t)}{\partial x_k(t)} = p|x_k(t)|^{p-1}I\{|x_k(t)|^p > \delta_k\}I\{k \le n\}.$$

所以，对 $n > m$ 有

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}(u_n - u_m, u_n - u_m) \\
&= \frac{p^2}{2}\int \sum_{k=m+1}^{n} \gamma_k |x_k|^{2(p-1)} I\{|x_k|^p > \delta_k\} dm(x) \\
&\le c \sum_{k=m+1}^{n} \gamma_k \left(\frac{\gamma_k}{\lambda_k}\right)^{p-1} \exp\left\{-\frac{1}{4}\delta_k^{2/p} \Big/ \left(\frac{\gamma_k}{\lambda_k}\right)\right\} \\
&= c \sum_{k=m+1}^{n} \left(\frac{\gamma_k}{\lambda_k}\right)^{p/2}. \qquad (3.1.14)
\end{aligned}$$

其中的不等式利用了下列事实：当 $x \to \infty$ 时

$$\int_x^\infty y^p e^{-y^2/2} dy \le e^{-x^2/2} P(x) = O(e^{-x^2/4}),$$

这里 $P(\cdot)$ 是某一多项式. 现在 $u_n \uparrow u = \sum_{k=1}^\infty |x_k|^p \vee \delta_k$ 且 $u \le \|x\|_{l^p}^p + \sum_{k=1}^\infty \delta_k$，它属于 L^2，故在 L_2 中 $u_n \to u$. 由 (3.1.14) 可得 $\{u_n\}$ 是 $\mathcal{E}$-Cauchy 序列，故在 $\mathcal{E}_1$ 范数意义下， $u - u_n \to 0$.

应用引理 3.1.1，对任给的 $T > 0$，我们有

$$\begin{aligned}
&P\Big\{\sup_{0\le t\le T} \sum_{k=n+1}^{\infty} |X_k(t)|^p \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\Big\} \\
&\ge P\Big\{\sup_{0\le t\le T} (u - u_n) Y(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\Big\} = 1,
\end{aligned}$$

这就给出了所要证的结论.

推论 3.1.2 若对 $1 \le p < 2$，$\sum_{k=1}^\infty (\gamma_k/\lambda_k)^{p/2} \log(\lambda_k \vee e)^{p/2} < \infty$，或者对 $2 \le p < \infty$，$\sum_{k=1}^\infty (\gamma_k/\lambda_k)^{p/2} \log(\gamma_k \vee e)^{p/2} < \infty$，那么 $Y(\cdot)$ 在 l^p 中是 a.s. 连续的.

注 3.1.2　由上面的证明可见 $Y(\cdot)$ 的分量间的独立性对于定理 3.1.2 的结论不是必要的.

3.1.3　l^p 值 Gauss 过程

设 $\{Y(t);-\infty<t<\infty\}=\{X_k(t);-\infty<t<\infty\}_{k=1}^{\infty}$ 为本节开始定义的 Gauss 过程序列. 令

$$\sigma(p,h)=\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^p(h)\Big)^{1/p},\quad p\ge 1,$$

$$\sigma^*(h)=\max_{k\ge 1}\sigma_k(h),$$

$$\tilde{\sigma}(p,h)=\begin{cases}\sigma(\dfrac{2p}{2-p},h), & \text{当}1\le p<2\text{时},\\ \sigma^*(h), & \text{当}p\ge 2\text{时},\end{cases}$$

$$\delta_p^p=\mathrm{E}|N(0,1)|^p,\qquad p\ge 1.$$

由于 $\mathrm{E}\|Y(t+h)-Y(t)\|_{l^p}^p=\delta_p^p\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^p(h)$, 故对固定的 t 和 h, $Y(t+h)-Y(t)\in l^p$ $(p\ge 1)$ a.s. 成立当且仅当

$$\sigma(p,h)<\infty, \tag{3.1.15}$$

且对每一个 t, $Y(t)\in l^p$ a.s. 当且仅当 (3.1.15) 和

$$\sum_{k=1}^{\infty}E|X_k(0)|^p<\infty. \tag{3.1.16}$$

引理 3.1.2　对 $p\ge 1$ 和任何 $t,x,h\ge 0$ 有

$$P\{\|Y(t+h)-Y(t)\|_{l^p}\ge\delta_p\sigma(p,h)+x\tilde{\sigma}(p,h)\}\le 2\exp(-x^2/2).$$

证明　设 $\{\xi_n;n\ge 1\}$ 是独立正态随机变量列, $E\xi_n=0$ 且 $\sum_{k=1}^{\infty}(E\xi_k^2)^{p/2}<\infty$. 众所周知

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\Big)^{1/p}=\sup_{\|a\|_{l^q}\le 1}\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k a_k, \tag{3.1.17}$$

其中 $q=p/(p-1)$,$a=(a_1,a_2,\dots)\in l^q$. 应用 Borell 不等式 (定理 1.1.1), 我们有

$$\begin{aligned}
&P\Big\{\Big|\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\Big)^{1/p}-E\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\Big)^{1/p}\Big|\ge x\Big\}\\
&=P\Big\{\Big|\sup_{\|a\|_{l^q}\le 1}\sum_{k=1}^{\infty}a_k\xi_k-E\sup_{\|a\|_{l^q}\le 1}\sum_{k=1}^{\infty}a_k\xi_k\Big|\ge x\Big\}\\
&\le 2\exp\Big\{-\frac{x^2}{2\sup_{\|a\|_{l^q}\le 1}E(\sum_{k=1}^{\infty}a_k\xi_k)^2}\Big\}\\
&=2\exp\Big\{-\frac{x^2}{2\sup_{\|a\|_{l^q}\le 1}\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2E\xi_k^2}\Big\}.
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
&\sup_{\|a\|_{l^q}\le 1}\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2E\xi_k^2\\
&\le\begin{cases}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(E\xi_k^2)^{\frac{q}{q-2}}\Big)^{\frac{q-2}{q}}\sup_{\|a\|_{l^q}\le 1}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^q\Big)^{\frac{2}{q}}, & \text{当}1\le p<2\text{时},\\
\max_{k\ge 1}E\xi_k^2\sup_{\|a\|_{l^q}\le 1}\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2, & \text{当}p\ge 2\text{时}\end{cases}\\
&=\begin{cases}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(E\xi_k^2)^{p/(2-p)}\Big)^{(2-p)/p}, & \text{当}1\le p<2\text{时},\\
\max_{k\ge 1}E\xi_k^2, & \text{当}p\ge 2\text{时},\end{cases}
\end{aligned}$$

我们得

$$\begin{aligned}
&P\Big\{\Big|\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\Big)^{1/p}-E\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\Big)^{1/p}\Big|\ge x\Big\}\\
&=\begin{cases}2\exp\Big\{-\dfrac{x^2}{2(\sum_{k=1}^{\infty}(E\xi_k^2)^{p/(2-p)})^{(2-p)/p}}\Big\}, & \text{当}1\le p<2\text{时},\\
2\exp\Big\{-\dfrac{x^2}{2\max_{k\ge 1}E\xi_k^2}\Big\}, & \text{当}p\ge 2\text{时}.\end{cases}
\end{aligned}\tag{3.1.18}$$

因为由 Hőlder 不等式有

$$E\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\Big)^{1/p} \le \Big(\sum_{k=1}^{\infty}E|\xi_k|^p\Big)^{1/p} = \delta_p\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(E\xi_k^2)^{p/2}\Big)^{1/p},$$

由 (3.1.18), 引理得证.

下面我们利用引理 3.1.2 来建立 Fernique 型不等式. 我们考察较一般的过程, 它不必是 Gauss 的. 下述引理是 Csáki, Csörgő 和 Shao (1992) 得到的.

引理 3.1.3 设 $\mathcal{B}$ 为一可分的 Banach 空间, 其范数为 $\|\cdot\|$; 设 $\{\Gamma(t); -\infty < t < \infty\}$ 是取值于 $\mathcal{B}$ 中的随机过程, P 是由 $\Gamma(\cdot)$ 生成的概率测度. 假设 $\Gamma(\cdot)$ 关于 $\|\cdot\|$ 是 P a.s. 可分的, 且对 $|t| \le t_0$, $0 < x^* \le x$ 和 $0 < h \le h_0$ 存在非负单调不减函数 $\sigma_1(h)$ 和 $\sigma_2(h)$, 使得对某 $K, \gamma, \beta > 0$

$$P\big\{\|\Gamma(t+h)-\Gamma(t)\| \ge x\sigma_1(h)+\sigma_2(h)\big\} \le K\exp(-\gamma x^{\beta}). \quad (3.1.19)$$

则对任何 $0 \le T \le t_0$, $0 < a \le h_0$, $x \ge x^*$ 和 $k \ge 3$ 有

$$\begin{aligned} P\Big\{\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le a}\|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\| &\ge x(\sigma_1(a)+\sigma_1(a,k)) \\ &\quad + \sigma_1^*(a,k)+\sigma_2(a)+\sigma_2(a,k)\Big\} \\ &\le 4\Big(\frac{T}{a}+1\Big)K\cdot 2^{2^{k+1}}\exp(-\gamma x^{\beta}), \quad (3.1.20) \end{aligned}$$

其中

$$\sigma_1(a,k) = 2^{3+1/\beta}\int_{2^{k-3}}^{\infty}\frac{\sigma_1(ae^{-z})}{z}dz,$$

$$\sigma_2(a,k) = 6\int_{2^{k-3}}^{\infty}\frac{\sigma_2(ae^{-z})}{z}dz,$$

$$\sigma_1^*(a,k) = 4\Big(\frac{14}{\gamma}\Big)^{1/\beta}\beta\int_{2^{\frac{k-2}{\beta}}}^{\infty}\sigma_1(ae^{-z^{\beta}})dz.$$

证明 对任何正实数 t 和 $k \ge 3$ 令 $t_j = a\big[t\cdot\frac{2^{2^j}}{a}\big]/2^{2^j}$, $R = 2^{2^k}$. 记 $\mathcal{T} = \{t_j : t \ge 0, j \ge 1\}$. 对每一 $t, s \in \mathcal{T}$ 我们有

$$\begin{aligned} &\|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\| \\ &\le \|\Gamma((t+s)_k)-\Gamma(t_k)\| + \|\Gamma(t+s)-\Gamma((t+s)_k)\| \\ &\quad + \|\Gamma(t)-\Gamma(t_k)\| \end{aligned}$$

$$\le \|\Gamma((t+s)_k) - \Gamma(t_k)\| + \sum_{j=0}^{\infty} \|\Gamma((t+s)_{k+j+1}) - \Gamma((t+s)_{k+j})\|$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \|\Gamma(t_{k+j+1}) - \Gamma(t_{k+j})\|,$$

事实上，上述两个级数都是有限和．由于 $\Gamma(\cdot)$ 关于 $\|\cdot\|$ 的 a.s. 可分性，我们有

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le a} \|\Gamma(t+s) - \Gamma(t)\| \\
&\quad = \sup_{\substack{t\in\mathcal{T}\\0\le t\le T}}\sup_{\substack{s\in\mathcal{T}\\0\le s\le a}} \|\Gamma(t+s) - \Gamma(t)\| \\
&\quad \le \sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le a} \|\Gamma((t+s)_k) - \Gamma(t_k)\| \\
&\qquad + \sum_{j=0}^{\infty} \sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le a} \|\Gamma((t+s)_{k+j+1}) - \Gamma((t+s)_{k+j})\| \\
&\qquad + \sum_{j=0}^{\infty} \sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le a} \|\Gamma(t_{k+j+1}) - \Gamma(t_{k+j})\|.
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le a(1-\frac{1}{R})} |(t+s)_k - t_k| \le a, \\
&\sup_{0\le t\le T}\sup_{a(1-1/R)\le s\le a} \left|(t+s)_k - \Big(t+a\Big(1-1/R\Big)\Big)_k\right| \le 2a\cdot 2^{-2^k}, \\
&\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le a} |(t+s)_{k+j+1} - (t+s)_{k+j}| \le a\cdot 2^{-2^{k+j}}, \\
&\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le a} \|\Gamma((t+s)_k) - \Gamma(t_k)\| \\
&\quad \le \sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le a(1-\frac{1}{R})} \|\Gamma((t+s)_k) - \Gamma(t_k)\| \\
&\qquad + \sup_{0\le t\le T}\sup_{a(1-\frac{1}{R})\le s\le a} \|\Gamma((t+s)_k) - \Gamma((t+a(1-1/R))_k)\|,
\end{aligned}$$

由 (3.1.19) 得，对每一 $x \geq x^*$ 和 $x_j \geq x^*$ 有

$$P\Big\{\sup_{0\leq t\leq T}\sup_{0\leq s\leq a(1-\frac{1}{R})}\|\Gamma((t+s)_k)-\Gamma(t_k)\|\geq x\sigma_1(a)+\sigma_2(a)\Big\}$$
$$\leq 2KR^2(T/a+1)\exp(-\gamma x^\beta),$$
$$P\Big\{\sup_{0\leq t\leq T}\sup_{a(1-1/R)\leq s\leq a}\|\Gamma((t+s)_k)-\Gamma((t+a(1-1/R))_k)\|$$
$$\geq x\sigma_1(2a/R)+\sigma_2(2a/R)\Big\}$$
$$\leq 2KR(T/a+1)\exp(-\gamma x^\beta),$$
$$P\Big\{\sup_{0\leq t\leq T}\sup_{0\leq s\leq a}\|\Gamma((t+s)_{k+j+1})-\Gamma((t+s)_{k+j})\|$$
$$\geq x_j\sigma_1(a/2^{2^{k+j}})+\sigma_2(a/2^{2^{k+j}})\Big\}$$
$$\leq 2K2^{2^{k+j+1}}(T/a+1)\exp(-\gamma x_j^\beta),$$

以及

$$P\Big\{\sup_{0\leq t\leq T}\|\Gamma(t_{k+j+1})-\Gamma(t_{k+j})\|\geq x_j\sigma_1(a/2^{2^{k+j}})+\sigma_2(a/2^{2^{k+j}})\Big\}$$
$$\leq K2^{2^{k+j+1}}(T/a+1)\exp(-\gamma x_j^\beta).$$

现在令 $\gamma x_j^\beta=\gamma x^\beta+2^{k+j+1}$. 则

$$\sum_{j=0}^{\infty}2^{2^{k+j+1}}\exp(\gamma x_j^\beta)=\sum_{j=0}^{\infty}2^{2^{k+j+1}}e^{-2^{k+j+1}}e^{-\gamma x^\beta}\leq\exp(-\gamma x^\beta).$$

由 x_j 的定义，我们知

$$x_j\leq 2^{\frac{1}{\beta}}x+(2/\gamma)^{\frac{1}{\beta}}2^{\frac{k+j+1}{\beta}},$$

$$x\sigma_1\Big(\frac{2a}{R}\Big)+\sigma_2\Big(\frac{2a}{R}\Big)+2\sum_{j=0}^{\infty}x_j\sigma_1\Big(\frac{a}{2^{2^{k+j}}}\Big)+2\sum_{j=0}^{\infty}\sigma_2\Big(\frac{a}{2^{2^{k+j}}}\Big)$$
$$\leq x\Big(\sigma_1\Big(\frac{2a}{2^{2^k}}\Big)+2^{1+\frac{1}{\beta}}\sum_{j=0}^{\infty}\sigma_1\Big(\frac{a}{2^{2^{k+j}}}\Big)\Big)$$
$$+2\Big(\frac{2}{\gamma}\Big)^{\frac{1}{\beta}}\sum_{j=0}^{\infty}2^{\frac{k+j+1}{\beta}}\sigma_1\Big(\frac{a}{2^{2^{k+j}}}\Big)+\sigma_2\Big(\frac{2a}{R}\Big)+2\sum_{j=0}^{\infty}\sigma_2\Big(\frac{a}{2^{2^{k+j}}}\Big),$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_1\left(\frac{2a}{2^{2^k}}\right)+2^{1+\frac{1}{\beta}}\sum_{j=0}^{\infty}\sigma_1\left(\frac{a}{2^{2^{k+j}}}\right)\le\left(1+2^{\frac{1}{\beta}+1}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\sigma_1\left(\frac{2a}{2^{2^{k+j}}}\right)\\
&\quad\le\left(1+2^{\frac{1}{\beta}+1}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\int_{2^{k+j-1}}^{2^{k+j}}\frac{\sigma_1(\frac{2a}{2^z})}{z}dz/\ln 2\\
&\quad\le 2^{3+\frac{1}{\beta}}\int_{2^{k-1}}^{\infty}\frac{\sigma_1(\frac{2a}{2^z})}{z}dz\\
&\quad\le 2^{3+\frac{1}{\beta}}\int_{2^{k-3}}^{\infty}\frac{\sigma_1(ae^{-z})}{z}dz\\
&\quad=\sigma_1(a,k),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&2\left(\frac{2}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\beta}}\sum_{j=0}^{\infty}2^{\frac{k+j+1}{\beta}}\sigma_1\left(\frac{a}{2^{2^{k+j}}}\right)\\
&\quad\le\frac{2^{\frac{2}{\beta}+1}(\frac{2}{\gamma})^{\frac{1}{\beta}}}{\beta(2^{\frac{1}{\beta}}-1)}\sum_{j=0}^{\infty}\int_{2^{k+j-1}}^{2^{k+j}}z^{\frac{1}{\beta}-1}\sigma_1(a2^{-z})dz\\
&\quad\le\frac{2^{\frac{1}{\beta}+1}(\frac{4}{\gamma})^{\frac{1}{\beta}}}{2^{\frac{1}{\beta}}-1}\int_{2^{\frac{k-1}{\beta}}}^{\infty}\sigma_1\left(a2^{-z^\beta}\right)dz\\
&\quad\le 4\left(\frac{14}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\beta}}\cdot\beta\int_{2^{\frac{k-2}{\beta}}}^{\infty}\sigma_1\left(ae^{-z^\beta}\right)dz\\
&\quad=\sigma_1^*(a,k),
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
2\sum_{j=0}^{\infty}\sigma_2\left(\frac{a}{2^{2^{k+j}}}\right)+\sigma_2\left(\frac{2a}{2^{2^k}}\right)&\le 6\int_{2^{k-3}}^{\infty}\frac{\sigma_2(ae^{-z})}{z}dz\\
&=\sigma_2(a,k).
\end{aligned}
$$

综合上述不等式得证 (3.1.20). 引理 3.1.3 证毕.

利用引理 3.1.2 和 3.1.3, 我们来给出 $Y(\cdot)\in l^p$ $(p\ge 1)$ 连续的下述充分条件.

定理 3.1.3 假设条件 (3.1.16) 满足, 且

$$
\int_1^{\infty}\frac{\sigma(p,e^{-z})}{z}dz<\infty, \tag{3.1.21}
$$

$$\int_1^\infty \tilde{\sigma}(p, e^{-z^2})dz < \infty. \tag{3.1.22}$$

则 $Y(\cdot) \in l^p$ $(p \geq 1)$ 具有 a.s. 连续的样本轨道.

证明 只需证明对任给的 $\varepsilon > 0, T > 0$

$$\lim_{h\to 0} P\Big\{\sup_{|t|\leq T}\sup_{0\leq s\leq h}\sum_{k=1}^\infty |X_k(t+s) - X_k(t)|^p \geq \varepsilon^p\Big\} = 0,$$

即

$$\lim_{h\to 0}\lim_{N\to\infty} P\Big\{\sup_{|t|\leq T}\sup_{0\leq s\leq h}\sum_{k=1}^N |X_k(t+s) - X_k(t)|^p \geq \varepsilon^p\Big\} = 0. \tag{3.1.23}$$

显然, 由 (3.1.22) 可得对每一 $k \geq 1$, $\int_1^\infty \sigma_k(e^{-z^2})dz < \infty$. 故由定理 2.1.6 知对每一 $k \geq 1$, $X_k(\cdot)$ 是 a.s. 连续的 Gauss 过程, 故对每一 N, 在 l^p 中, $Y_N(\cdot) := \{X_k(\cdot)\}_{k=1}^N$ 也是 a.s. 连续的. 应用引理 3.1.2 和 3.1.3, 对任一 $x > 0$ 和 $N \geq 1$ 有

$$\begin{aligned}P\Big\{\sup_{|t|\leq T}\sup_{0\leq s\leq h}\Big(\sum_{k=1}^N |X_k(t+s) - X_k(t)|^p\Big)^{1/p} &\geq x(\tilde{\sigma}(p,h) + \tilde{\sigma}_1(p,h)) \\ &+ \tilde{\sigma}_2(p,h) + \delta_p(\sigma(p,h) + \sigma_1(p,h))\Big\} \\ \leq 8(T+1)h^{-32}\exp(-x^2/2),&\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_1(p,h) &= 16\int_{\log h^{-1}}^\infty \frac{\tilde{\sigma}(p, he^{-z})}{z}dz, \\ \tilde{\sigma}_2(p,h) &= 11\int_{(\log h^{-1})^2}^\infty \tilde{\sigma}(p, he^{-z^2})dz, \\ \sigma_1(p,h) &= 6\int_{\log h^{-1}}^\infty \frac{\sigma(p, he^{-z})}{z}dz.\end{aligned}$$

因 $\tilde{\sigma}(p,h)$ 关于 h 是非减的, 由 (3.1.22) 即得

$$\tilde{\sigma}(p,h) = o((\log h^{-1})^{-1/2}), \quad h \to 0.$$

由此进一步得

$$\tilde{\sigma}_1(p,h)=o((\log h^{-1})^{-1/2}),\quad h\to 0.$$

另外，由 (3.1.22) 和 (3.1.21) 我们有

$$\tilde{\sigma}_2(p,h)+\delta_p(\sigma(p,h)+\sigma_1(p,h))\to 0,\quad h\to 0.$$

从而，我们得

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\lim_{N\to\infty}P\left\{\sup_{|t|\le T}\sup_{0\le s\le h}\left(\sum_{k=1}^{N}|X_k(t+s)-X_k(t)|^p\right)^{1/p}\ge\varepsilon\right\}\\
&\le\lim_{h\to 0}\lim_{N\to\infty}P\left\{\sup_{|t|\le T}\sup_{0\le s\le h}\left(\sum_{k=1}^{N}|X_k(t+s)-X_k(t)|^p\right)^{1/p}\ge\varepsilon/2\right.\\
&\qquad\left.+\tilde{\sigma}_2(p,h)+\delta_p(\sigma(p,h)+\sigma_1(p,h))\right\}\\
&\le 8(T+1)\lim_{h\to 0}h^{-32}\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{8(\tilde{\sigma}(p,h)+\tilde{\sigma}_1(p,h))^2}\right\}\\
&\le 8(T+1)\lim_{h\to 0}h^{-32}\exp(-34\log h^{-1})\\
&=0.
\end{aligned}$$

这就证明了 (3.1.23)，定理 3.1.3 得证.

§3.2　$\mathcal{B}$ 值随机过程的增量

在本节中我们将介绍由 Csörgő 和 Shao (1994) 建立的关于随机过程大增量和小增量的一般定理. 设 $\mathcal{B}$ 是可分 Banach 空间，具有范数 $\|\cdot\|$，令 $\{\Gamma(t);-\infty<t<\infty\}$ 为取值于 Banach 空间 $\mathcal{B}$ 的随机过程. 设 P 是由 $\Gamma(\cdot)$ 生成的概率测度.

定理 3.2.1　设 $a_T,b_T,C_T,\sigma_1(T),\sigma_2(T)$ 是非负连续函数. 假设 a_T 和 b_T 或同为 T 的非降函数，或同为 T 的非增函数，且

$$C_T+\sigma_1(T)+\sigma_1^{-1}(T)\to\infty\quad 当\quad T\to\infty,\tag{3.2.1}$$

又对任何满足下式的 x 有

$$\Big(\frac{1}{\gamma}\Big(\log C_T+\log\log\Big(\sigma_1(T)+\frac{1}{\sigma_1(T)}\Big)\Big)\Big)^{\frac{1}{\beta}}\le x$$
$$\le(1+\delta)\Big(\frac{1}{\gamma}\Big(\log C_T+\log\log\Big(\sigma_1(T)+\frac{1}{\sigma_1(T)}\Big)\Big)\Big)^{\frac{1}{\beta}}+\delta\frac{\sigma_2(T)}{\sigma_1(T)},\tag{3.2.2}$$

其中 $\gamma,\beta,\delta>0$, 成立

$$P\Big\{\sup_{0\le t\le b_T}\sup_{0\le s\le a_T}\|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\|\ge x\sigma_1(T)+\sigma_2(T)\Big\}$$
$$\le C_T\exp(-\gamma x^{\beta}).\tag{3.2.3}$$

则有

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le b_T}\sup_{0\le s\le a_T}\alpha_T\|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\|\le 1\quad\text{a.s.},\tag{3.2.4}$$

其中 $\alpha_T^{-1}=\sigma_1(T)(\frac{1}{\gamma}(\log C_T+\log\log(\sigma_1(T)+\frac{1}{\sigma_1(T)})))^{\frac{1}{\beta}}+\sigma_2(T)$.

证明 不失一般性可设 $0<\delta<1/2$ 且 a_T 和 b_T 都是非降的. 令 $1<\theta<1+\delta/2$. 定义

$$A_k=\{T:\theta^k<\sigma_1(T)\le\theta^{k+1}\},\quad -\infty<k<\infty,$$
$$A_{k,j}=\{T:2^j\le C_T<2^{j+1},T\in A_k\},\quad j\ge 0,$$
$$A_{k,j,i}=\{T:\theta^i<\sigma_2(T)\le\theta^{i+1},T\in A_{k,j}\},\quad -\infty<i<\infty,$$
$$T_{k,j,i}=\sup\{T:T\in A_{k,j,i}\}.$$

记 $a(T)=a_T$, $b(T)=b_T$. 注意到 (3.2.1) 满足, 并利用 a_T, b_T, C_T, $\sigma_1(T)$ 和 $\sigma_2(T)$ 的连续性, 我们有

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le b_T}\sup_{0\le s\le a_T}\alpha_T\|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\|$$
$$\le\limsup_{|k|+l\to\infty}\sup_{j\ge l}\sup_{T\in A_{k,j}}\sup_{0\le t\le b_T}\sup_{0\le s\le a_T}\alpha_T\|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\|$$
$$\le\limsup_{|k|+l\to\infty}\sup_{j\ge l}\sup_{T\in A_{k,j}}\sup_{0\le t\le b_T}\sup_{0\le s\le a_T}\|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\|/$$
$$[\theta^k(\frac{1}{\gamma}(\log 2^j+\log\log\theta^{|k|}))^{1/\beta}+\sigma_2(T)]$$

$$\leq \max\Big\{\limsup_{|k|+l\to\infty}\sup_{j\geq l}\sup_{i\leq k}\sup_{T\in A_{k,j,i}}\sup_{0\leq t\leq b_T}\sup_{0\leq s\leq a_T}\|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\|/$$

$$\big[\theta^k(\frac{1}{\gamma}(\log(2^j\log\theta^{|k|})))^{1/\beta}\big],$$

$$\limsup_{|k|+l\to\infty}\sup_{j\geq l}\sup_{i>k}\sup_{0\leq t\leq b(T_{k,j,i})}\sup_{0\leq s\leq a(T_{k,j,i})}\|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\|/$$

$$\big[\theta^k(\frac{1}{\gamma}(\log 2^j+\log\log\theta^{|k|}))^{1/\beta}+\theta^i\big]\Big\}. \tag{3.2.5}$$

首先我们来证

$$\limsup_{|k|+l\to\infty}\sup_{j\geq l}\sup_{i>k}\sup_{0\leq t\leq b(T_{k,j,i})}\sup_{0\leq s\leq a(T_{k,j,i})}\|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\|/$$

$$\big[\theta^k(\frac{1}{\gamma}(\log 2^j+\log\log\theta^{|k|}))^{1/\beta}+\theta^i\big]$$

$$\leq \theta\limsup_{|k|+l\to\infty}\sup_{j\geq l}\sup_{i>k}\sup_{0\leq t\leq b(T_{k,j,i})}\sup_{0\leq s\leq a(T_{k,j,i})}\alpha_{T_{k,j,i}}\|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\|$$

$$\leq \theta^2 \quad \text{a.s.} \tag{3.2.6}$$

由 (3.2.2) 得

$$P\Big\{\sup_{j\geq l}\sup_{i>k}\sup_{0\leq t\leq b(T_{k,j,i})}\sup_{0\leq s\leq a(T_{k,j,i})}\alpha_{T_{k,j,i}}\|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\|\geq\theta\Big\}$$

$$\leq \sum_{j\geq l}\sum_{i>k}C_{T_{k,j,i}}\exp\Big(-\gamma\Big(\big((\theta-1)\frac{\sigma_2(T_{k,j,i})}{\sigma_1(T_{k,j,i})}$$

$$+\theta\Big(\frac{1}{\gamma}(\log C_{T_{k,j,i}}+\log\log\theta^{|k|})\Big)^{\frac{1}{\beta}}\Big)^{\beta}\Big)$$

$$\leq \sum_{j\geq l}\sum_{i>k}C_{T_{k,j,i}}\exp\Big(-\gamma\Big(\big((\theta-1)\theta^{i-k-1}$$

$$+\theta\Big(\frac{1}{\gamma}(\log C_{T_{k,j,i}}+\log\log\theta^{|k|})\Big)^{\frac{1}{\beta}}\Big)^{\beta}\Big)$$

$$\leq \sum_{j\geq l}\sum_{\substack{i>k\\ \theta^{i-k}\leq j^{2/\beta}+k^2}}C_{T_{k,j,i}}\exp\Big(-\theta^{\beta}(\log C_{T_{k,j,i}}+\log\log\theta^{|k|})\Big)$$

$$+\sum_{j\geq l}\sum_{\theta^{i-k}>j^{2/\beta}+k^2}C_{T_{k,j,i}}\exp(-\gamma(\theta-1)^{\beta}\theta^{(i-k-1)\beta})$$

$$\le c\Big(\sum_{j\ge l}(j^{2/\beta}+\log|k|)2^{-j(\theta^\beta-1)}(|k|+1)^{-\theta^\beta}$$

$$+\sum_{j\ge l}2^{-j}\exp\Big(-\gamma\Big(1-\frac{1}{\theta}\Big)^\beta(j^{2/\beta}+k^2)^\beta\Big)\Big)$$

$$\le c2^{-\frac{l(\theta^\beta-1)}{2}}(1+|k|)^{-\frac{\theta^\beta+1}{2}}, \tag{3.2.7}$$

其中常数 c 仅依赖于 θ,β 和 γ. 所以

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{|k|=0}^{\infty}P\Big\{\sup_{j\ge l}\sup_{i>k}\sup_{0\le t\le b(T_{k,j,i})}\sup_{0\le s\le a(T_{k,j,i})}\alpha_{T_{k,j,i}}$$

$$\cdot\|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\|>\theta\Big\}<\infty. \tag{3.2.8}$$

从 (3.2.8) 和 Borel-Cantelli 引理即得 (3.2.6).

其次，我们来证

$$\limsup_{|k|+l\to\infty}\sup_{j\ge l}\sup_{T\in A_{k,j},\sigma_2(T)\le\theta^{k+1}}\sup_{0\le t\le b_T}\sup_{0\le s\le a_T}\frac{\|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\|}{\theta^k(\frac{1}{\gamma}(\log(2^j\log\theta^{|k|})))^{1/\beta}}$$

$$\le\theta^2\quad\text{a.s.} \tag{3.2.9}$$

令

$$T_{k,j}=\sup\{T:T\in A_{k,j},\sigma_2(T)\le\theta^{k+1}\}.$$

则

$$\sigma_2(T_{k,j})\le\theta^{k+1}$$

且

$$\limsup_{|k|+l\to\infty}\sup_{j\ge l}\sup_{T\in A_{k,j},\sigma_2(T)\le\theta^{k+1}}\sup_{0\le t\le b_T}\sup_{0\le s\le a_T}\frac{\|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\|}{\theta^k(\frac{1}{\gamma}(\log(2^j\log\theta^{|k|})))^{1/\beta}}$$

$$\le\limsup_{|k|+l\to\infty}\sup_{j\ge l}\sup_{0\le t\le b(T_{k,j})}\sup_{0\le s\le a(T_{k,j})}\|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\|/$$

$$[\theta^k(\frac{1}{\gamma}(\log(2^j\log\theta^{|k|})))^{1/\beta}+\sigma_2(T_{k,j})]$$

$$\le\theta\limsup_{|k|+l\to\infty}\sup_{j\ge l}\sup_{0\le t\le b(T_{k,j})}\sup_{0\le s\le a(T_{k,j})}\alpha_{T_{k,j}}\|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\|.$$

(3.2.9) 的余下部分证明可沿着 (3.2.6) 的同一思路而得. 现在 (3.2.4) 可由 (3.2.5), (3.2.6), (3.2.9) 和 δ 的任意性得到. 定理 3.2.1 证毕.

下一定理指出 a_T 和 b_T 同为 T 的非降或同为 T 的非增函数的假设在某些条件下可以去掉.

定理 3.2.2 设 $a_T, b_T, \sigma_1(T)$ 和 $\sigma_2(T)$ 是非负连续函数. 假设

$$\frac{b_T}{a_T} + \sigma_1(T) + \frac{1}{\sigma_1(T)} \to \infty \quad 当 \quad T \to \infty, \tag{3.2.10}$$

且对任何 $b \geq b_T$ 及 $\gamma, \beta, \delta,\ A > 0$ 和满足下式的 x

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\gamma}\left(\log\left(\frac{b}{a_T}+1\right) + \log\log\left(\sigma_1(T) + \frac{1}{\sigma_1(T)}\right)\right)\right)^{\frac{1}{\beta}} \leq x \\
&\quad \leq (1+\delta)\left(\frac{1}{\gamma}\left(\log\left(\frac{b}{a_T}+1\right) + \log\log\left(\sigma_1(T) + \frac{1}{\sigma_1(T)}\right)\right)\right)^{\frac{1}{\beta}} \\
&\qquad + \delta\frac{\sigma_2(T)}{\sigma_1(T)}
\end{aligned}$$

成立

$$\begin{aligned}
P\Big\{&\sup_{0\leq t\leq b}\sup_{0\leq s\leq a_T} \|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\| \geq x\sigma_1(T)+\sigma_2(T)\Big\} \\
&\leq A(1+\frac{b}{a_T})\exp(-\gamma x^{\beta}).
\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

那么

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\leq t\leq b_T}\sup_{0\leq s\leq a_T} \alpha_T^*\|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\| \leq 1 \quad \text{a.s.}, \tag{3.2.12}$$

其中
$$\begin{aligned}
1/\alpha_T^* = \sigma_1(T)(&\tfrac{1}{\gamma}(\log(b_T/a_T+1) \\
&+\log\log(\sigma_1(T)+\sigma_1^{-1}(T))))^{1/\beta} + \sigma_2(T).
\end{aligned}$$

证明 设 $C_T = 1 + b_T/a_T$. 不失一般性假设 $0 < \delta < 1/2$. 设 $\theta, A_k, A_{k,j}, A_{k,j,i}$ 如定理 3.2.1 的证明中一样. 令

$$b(T_{k,j,i}) = \sup\{b_T : T \in A_{k,j,i}\}$$

和

$$a(T^*_{k,j,i}) = \sup\{a_T : T \in A_{k,j,i}\}.$$

易知 $b(T_{k,j,i}) \geq b(T^*_{k,j,i})$ 且

$$2^j \leq \frac{b(T^*_{k,j,i})}{a(T^*_{k,j,i})} + 1 \leq \frac{b(T_{k,j,i})}{a(T^*_{k,j,i})} + 1 \leq \frac{b(T_{k,j,i})}{a(T_{k,j,i})} + 1 \leq 2^{j+1}.$$

因此，沿着定理 3.2.1 的证明路线可得

$$\begin{aligned}
&\limsup_{T\to\infty} \sup_{0\leq t\leq b_T} \sup_{0\leq s\leq a_T} \alpha^*_T \|\Gamma(t+s) - \Gamma(t)\| \\
&\leq \limsup_{|k|+l\to\infty} \sup_{j\geq l} \sup_{T\in A_{k,j}} \sup_{0\leq t\leq b_T} \sup_{0\leq s\leq a_T} \alpha^*_T \,\|\Gamma(t+s) - \Gamma(t)\| \\
&\leq \limsup_{|k|+l\to\infty} \sup_{j\geq l} \sup_{i} \sup_{T\in A_{k,j,i}} \sup_{0\leq t\leq b(T_{k,j,i})} \sup_{0\leq s\leq a(T^*_{k,j,i})} \alpha^*_T \\
&\quad \cdot \|\Gamma(t+s) - \Gamma(t)\| \\
&\leq \theta^2 \quad \text{a.s.}
\end{aligned}$$

由 δ 的任意性，这就证明了 (3.2.12).

利用引理 3.1.3, 我们可给出上述定理的若干推论，为此先证明下述引理.

引理 3.2.1 设 $\{\Gamma(t); -\infty < t < \infty\}$, $\sigma_1(h)$ 和 $\sigma_2(h)$ 如引理 3.1.3 中定义，且假设对某 $\alpha > 0$, $\sigma_1(x)/x^\alpha$ 和 $\sigma_2(x)/x^\alpha$ 在 $(0, h_0)$ 中是拟增的. 那么对任何 $0 < \varepsilon < 1$ 存在 $C = C(\varepsilon, \beta, \gamma, \alpha)$ 使得对每一 $x \geq \max(1, \frac{x^*}{1-\varepsilon})$, $0 \leq T \leq t_0$ 和 $0 < h \leq h_0$ 有

$$\begin{aligned}
&P\Big\{\sup_{0\leq t\leq T} \sup_{0\leq s\leq h} \|\Gamma(t+s) - \Gamma(t)\| \geq x\sigma_1(h) + (1+\varepsilon)\sigma_2(h)\Big\} \\
&\qquad\qquad \leq CK\Big(\frac{T}{h} + 1\Big)\exp\Big(-\frac{\gamma x^\beta}{1+\varepsilon}\Big). \qquad (3.2.13)
\end{aligned}$$

证明 因 $\sigma_1(x)/x^\alpha$ 和 $\sigma_2(x)/x^\alpha$ 在 $(0, h_0)$ 中是拟增的，即存在正数 c_0 使得对所有的 $0 < t \leq 1$ 有

$$\sigma_i(ht) \leq c_0 t^\alpha \sigma_i(h), \quad i = 1, 2. \qquad (3.2.14)$$

由 (3.2.14) 易知

$$\begin{aligned}
&\sigma_i(h,k) \leq 2^{3+\frac{1}{\beta}} c_0 e^{-\alpha(k-3)} \alpha^{-1} \sigma_i(h), \\
&\sigma^*_i(h,k) \leq 4\Big(\frac{14}{\gamma}\Big)^{\frac{1}{\beta}} \beta c_0 e^{-\alpha(k-2)} \alpha^{-1} \sigma_1(h), \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

因此对 $\delta=\min\bigl(\varepsilon,1-(1+\varepsilon)^{-1/\beta}\bigr)$, 可取 k 使得

$$\sigma_2(h,k)+\sigma_1(h,k)+\sigma_1^*(h,k)\le\frac{\delta}{2}(\sigma_1(h)+\sigma_2(h)).$$

由引理 3.1.3, 我们有

$$\begin{aligned}&P\Bigl\{\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le h}\|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\|\ge x\sigma_1(h)+(1+\varepsilon)\sigma_2(h)\Bigr\}\\&\le P\Bigl\{\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le h}\|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\|\\&\ge x(1-\delta)(\sigma_1(h)+\sigma_1(h,k))+\sigma_1^*(h,k)+\sigma_2(h)+\sigma_2(h,k)\Bigr\}\\&\le 4K\Bigl(\frac{T}{h}+1\Bigr)2^{2^{k+1}}\exp(-\gamma(x(1-\delta))^{\beta})\\&\le 4K\Bigl(\frac{T}{h}+1\Bigr)2^{2^{k+1}}\exp\Bigl(-\frac{\gamma x^{\beta}}{1+\varepsilon}\Bigr).\end{aligned}$$

现在令 $C=C(\varepsilon,\beta,\gamma,\alpha)=4\cdot 2^{2^{k+1}}$, 就得证引理成立.

注 3.2.1　严格地讲 (3.2.13) 中的常数 C 不仅依赖于 $\varepsilon,\alpha,\gamma,\beta$, 也与 (3.2.14) 中的 c_0 有关. 但为方便计在以后仍写 $C=C(\varepsilon,\alpha,\gamma,\beta)$.

引理 3.2.2　设 $\{\Gamma(t);-\infty<t<\infty\}$, $\sigma_1(h)$ 和 $\sigma_2(h)$ 如引理 3.1.3 中定义, 并设对某 $\alpha>1/\beta$, $\sigma_1(x)(\log x^{-1})^{\alpha}$ 和 $\sigma_2(x)(\log x^{-1})^{\alpha}$ 在 $(0,1/2)$ 上是拟增的, 即存在 $c_0>0$ 使得对每一 $0<t\le 1$, $0<h\le\frac{1}{2}$ 有

$$\sigma_i(ht)\le c_0\sigma_i(h)\Bigl(\log\frac{1}{h}\Bigr)^{\alpha}\Big/\Bigl(\log\frac{1}{h}+\log\frac{1}{t}\Bigr)^{\alpha},\quad i=1,2.\quad(3.2.15)$$

则对任给的 $\varepsilon>0$, 对每一 $x\ge\max(x^*,1)$, $0\le T\le t_0$ 和 $0<h\le\min(e^{-8/\varepsilon},h_0,1/2)$, 有

$$\begin{aligned}&P\Bigl\{\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le h}\|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\|\ge x\sigma_1(h)(1+c_1c_0)\\&\qquad+\sigma_2(h)(1+c_1c_0)+c_2c_0\sigma_1(h)(\log h^{-1})^{1/\beta}\Bigr\}\\&\le 8K\Bigl(\frac{T}{h}+1\Bigr)\frac{1}{h^{2\varepsilon}}\exp(-\gamma x^{\beta}),\end{aligned}\qquad(3.2.16)$$

其中

$$c_1 = 2^{3+1/\beta}\Big(1+\frac{\varepsilon}{8}\Big)^{-\alpha}\Big(\frac{1}{\alpha}+\log\Big(1+\frac{8}{\varepsilon}\Big)\Big),$$
$$c_2 = 4\Big(\frac{14}{\gamma}\Big)^{1/\beta}\beta\frac{\beta\alpha}{\beta\alpha-1}\Big(1+\frac{\varepsilon}{4}\Big)^{-(\beta\alpha-1)/\beta}.$$

证明 在引理 3.1.3 中令 $2^k = \varepsilon\log h^{-1}$. 由 (3.2.15), 对 $i=1,2$ 我们有

$$\begin{aligned}
\sigma_i(h,k) &\le c_0 2^{3+1/\beta}\int_{2^{k-3}}^{\infty}\frac{\sigma_i(h)(\log 1/h)^\alpha}{z(\log(h+z)^{-1})^\alpha}dz\\
&= c_0 2^{3+1/\beta}\sigma_i(h)\int_{\frac{\varepsilon}{8}\log\frac{1}{h}}^{\infty}\frac{(\log h^{-1})^\alpha}{z(\log(h^{-1}+z)^{-1})^\alpha}dz\\
&= c_0 2^{3+1/\beta}\sigma_i(h)\int_{\varepsilon/8}^{\infty}\frac{1}{z(z+1)^\alpha}dz\\
&\le c_0 2^{3+1/\beta}\sigma_i(h)\Big(\int_{\varepsilon/8}^{1+\varepsilon/8}\frac{1}{z(1+\varepsilon/8)^\alpha}dz+\int_{1+\varepsilon/8}^{\infty}\frac{dz}{z^{1+\alpha}}\Big)\\
&\le c_0 2^{3+1/\beta}\sigma_i(h)\Big(1+\varepsilon/8\Big)^{-\alpha}\Big(\frac{1}{\alpha}+\log\Big(1+\frac{8}{\varepsilon}\Big)\Big)\\
&= c_0c_1\sigma_i(h)
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
\sigma_1^*(h,k) &\le 4\Big(\frac{14}{\gamma}\Big)^{1/\beta}\beta c_0\int_{2^{\frac{k-2}{\beta}}}^{\infty}\frac{\sigma_1(h)\log^\alpha h^{-1}}{(z^\beta+\log h^{-1})^\alpha}dz\\
&\le 4\Big(\frac{14}{\gamma}\Big)^{1/\beta}\beta c_0\sigma_1(h)\Big(\log\frac{1}{h}\Big)^{1/\beta}\int_{(\varepsilon/4)^{1/\beta}}^{\infty}\frac{1}{(1+z^\beta)^\alpha}dz\\
&\le 4\Big(\frac{14}{\gamma}\Big)^{1/\beta}\beta c_0\sigma_1(h)\Big(\log\frac{1}{h}\Big)^{\frac{1}{\beta}}\\
&\quad\cdot\Big(\int_{(\varepsilon/4)^{1/\beta}}^{(1+\varepsilon/4)^{1/\beta}}\frac{dz}{(1+\varepsilon/4)^\alpha}+\int_{(1+\varepsilon/4)^{1/\beta}}^{\infty}\frac{dz}{z^{\alpha\beta}}\Big)\\
&\le 4\Big(\frac{14}{\gamma}\Big)^{1/\beta}c_0\sigma_1(h)(\log h^{-1})^{\frac{1}{\beta}}\frac{\beta^2\alpha}{\beta\alpha-1}\Big(1+\frac{\varepsilon}{4}\Big)^{-\alpha-1/\beta}\\
&= c_0\sigma_1(h)(\log h^{-1})^{1/\beta}c_2.
\end{aligned}$$

由引理 3.1.3 即得 (3.2.16).

不等式 (3.2.13) 和 (3.2.16) 使我们能够去研究当 h 很小时 $\Gamma(\cdot)$ 的增量，我们将看到某些结果是出人意料的. (3.2.13) 和 (3.2.16) 的下述修正是为研究 $\Gamma(\cdot)$ 的大增量作准备的.

引理 3.2.3 设 $\{\Gamma(t); -\infty < t < \infty\}$, $\sigma_1(h)$ 和 $\sigma_2(h)$ 如引理 3.1.3 中定义，其中 $t_0 = h_0 = \infty$. 假设对某 $\alpha > 0$, $\sigma_1(x)/x^\alpha$ 和 $\sigma_2(x)/x^\alpha$ 在 $(0,\infty)$ 上是拟增的. 则对任何 $0 < \varepsilon < 1$, 存在 $C = C(\varepsilon, \gamma, \alpha, \beta)$ 使得对每一 $x \geq \max(1, x^*/(1-\varepsilon))$ 和 $T, a > 0$, 有

$$P\Big\{\sup_{0\leq t\leq T}\sup_{0\leq s\leq a}\|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\| \geq x\sigma_1(a) + (1+\varepsilon)\sigma_2(a)\Big\}$$

$$\leq CK\Big(\frac{T}{a}+1\Big)\exp\Big(-\frac{\gamma x^\beta}{1+\varepsilon}\Big). \tag{3.2.17}$$

引理 3.2.4 设 $\{\Gamma(t); -\infty < t < \infty\}$, $\sigma_1(x)$ 和 $\sigma_2(x)$ 如引理 3.1.3 中定义，其中 $t_0 = h_0 = \infty$. 假设对某 $\alpha > 1/\beta$, $\sigma_1(x)/(\log x)^\alpha$ 和 $\sigma_2(x)/(\log x)^\alpha$ 在 $(2,\infty)$ 上是拟增的，且 $\int_1^\infty \sigma_1(e^{-z^\beta})dz < \infty$, $\int_1^\infty \sigma_2(e^{-z})dz < \infty$. 则存在正常数 c_1, c_2 和 a_0 使得对每一 $x \geq \max(1, x^*)$ 和 $T \geq a \geq a_0$ 有

$$P\Big\{\sup_{0\leq t\leq T}\sup_{0\leq s\leq a}\|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\| \geq xc_1\sigma_1(a) + c_1\sigma_2(a)\Big\}$$

$$\leq c_2KT\exp(-\gamma x^\beta). \tag{3.2.18}$$

(3.2.17) 和 (3.2.18) 的证明类似于引理 3.2.1 和引理 3.2.2 的证明，从略.

综合定理 3.2.2 和上述引理，我们可得

推论 3.2.1 假设 $\Gamma(\cdot)$ 关于范数 $\|\cdot\|$ 是 P-a.s. 连续的，且存在非负连续函数 $\sigma_1(h)$ 和 $\sigma_2(h)$ 使得对每一 $t \geq 0, h > 0$ 和 $x \geq x^* > 0$ 及某 $K, \gamma, \beta > 0$ 有

$$P\{\|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\| \geq x\sigma_1(h) + \sigma_2(h)\} \leq K\exp(-\gamma x^\beta).$$

此外，假设对某 $\alpha > 0$, $\sigma_1(x)/x^\alpha$ 和 $\sigma_2(x)/x^\alpha$ 在 $(0,\infty)$ 上是拟增的，且有连续函数 a_T 和 b_T，使得

$$\frac{b_T}{a_T} + \sigma_1(a_T) + \frac{1}{\sigma_1(a_T)} \to \infty, \quad T \to \infty.$$

则

$$\limsup_{T\to\infty} \sup_{0\le t\le b_T} \sup_{0\le s\le a_T} \beta_T \|\Gamma(t+s) - \Gamma(t)\| \le 1 \quad \text{a.s.}, \qquad (3.2.19)$$

其中 $$\beta_T^{-1} = \sigma_1(a_T)(\gamma^{-1}(\log(1+b_T/a_T) + \log\log(\sigma_1(a_T) + \sigma_1(a_T)^{-1})))^{1/\beta} + \sigma_2(a_T).$$

证明 由引理 3.2.3, 对每一 $0 < \varepsilon < 1, b > 0$ 和 $x \ge \max(1, x^*/(1-\varepsilon))$ 我们有

$$P\Big\{\sup_{0\le t\le b} \sup_{0\le s\le a_T} \|\Gamma(t+s) - \Gamma(t)\| \ge x\sigma_1(a_T) + (1+\varepsilon)\sigma_2(a_T)\Big\}$$
$$\le K\Big(1 + \frac{b}{a_T}\Big)\exp\Big(-\frac{\gamma x^\beta}{1+\varepsilon}\Big).$$

因而，由定理 3.2.2 得

$$\limsup_{T\to\infty} \sup_{0\le t\le b_T} \sup_{0\le s\le a_T} \beta_T(\varepsilon)\|\Gamma(t+s) - \Gamma(t)\| \le 1 \quad \text{a.s.}, \qquad (3.2.20)$$

其中 $\beta_T^{-1}(\varepsilon) = \sigma_1(a_T)(\frac{1+\varepsilon}{\gamma}(\log(1+b_T/a_T) + \log\log(\sigma_1(a_T) + \sigma_1(a_T)^{-1})))^{1/\beta} + (1+\varepsilon)\sigma_2(a_T)$. 由 ε 的任意性，从 (3.2.20) 即得 (3.2.19).

推论 3.2.2 设 $\{\Gamma(t); -\infty < t < \infty\}$, $\sigma_1(h)$ 和 $\sigma_2(h)$ 如引理 3.2.1 中所示，其中 $t_0 = 1$. 那么我们有

$$\limsup_{h\to 0} \sup_{0\le t\le 1} \sup_{0\le s\le h} \theta_h \|\Gamma(t+s) - \Gamma(t)\| \le 1 \quad \text{a.s.}, \qquad (3.2.21)$$

其中 $\theta_h^{-1} = \sigma_1(h)\big(\gamma^{-1}\big(\log h^{-1} + \log\log \sigma_1(h)^{-1}\big)\big)^{1/\beta} + \sigma_2(h)$.

推论 3.2.3 设 $\{\Gamma(t); -\infty < t < \infty\}$, $\sigma_1(h)$ 和 $\sigma_2(h)$ 如引理 3.2.2 中所示. 则存在正常数 C 使得

$$\limsup_{h\to 0} \sup_{0\le t\le 1} \sup_{0\le s\le h} \theta_h \|\Gamma(t+s) - \Gamma(t)\| \le C \quad \text{a.s.} \tag{3.2.22}$$

推论 3.2.2 和 3.2.3 的证明类似于推论 3.2.1 的证明, 从略.

§3.3 l^p 值 Gauss 过程的增量

设 $\{Y(t); t \ge 0\} = \{X_k(t); t \ge 0\}_{k=1}^{\infty}$ 是独立 Gauss 过程序列, $EX_k(t) = 0$ 且有平稳增量 $\sigma_k^2(h) = E(X_k(t+h) - X_k(t))^2$, 其中对每一 $k \ge 1$, 假设 $\sigma_k(h)$ 是非降连续函数. 我们将继续使用 3.1.3 小节中的记号.

3.3.1 当 $\sigma(p,h)/h^\alpha$ 和 / 或 $\tilde{\sigma}(p,h)/h^\alpha$ 是拟增时的增量

首先考察当 $\sigma(p,h)$ 和 / 或 $\tilde{\sigma}(p,h)$ 无界时的情形. 下面两命题在主要定理的证明中将被用到.

命题 3.3.1 设 a_T $(T>0)$ 是正连续函数且 b_T $(T>0)$ 是非负连续函数. 令 $a^* = \sup_{T>0} a_T$. 假设对某 $\alpha > 0$, 在 $(0, a^*)$ 上 $\sigma(p,h)/h^\alpha$ 和 $\tilde{\sigma}(p,h)/h^\alpha$ 是拟增的且

$$\frac{1+b_T}{a_T} + a_T \to \infty \quad 当 \quad T \to \infty. \tag{3.3.1}$$

那么我们有

$$\limsup_{T\to\infty} \sup_{0\le t\le b_T} \sup_{0\le s\le a_T} \beta(p,T) \|Y(t+s) - Y(t)\|_{l^p} \le 1 \quad \text{a.s.}, \tag{3.3.2}$$

其中 $\beta(p,T)^{-1} = \delta_p \sigma(p, a_T) + \tilde{\sigma}(p, a_T)(2(\log(b_T/a_T) + \log\log(a_T + 1/a_T)))^{1/2}$.

证明 回顾到

$$\tilde{\sigma}(p,h)$$
$$= \begin{cases} \delta_{2p/(2-p)}^{-1}\Big(E\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|X_k(t+h)-X_k(t)|^{2p/(2-p)}\Big)\Big)^{(2-p)/2p}, & \text{若} 1\le p<2, \\ \max_{k\ge1}(E(X_k(t+h)-X_k(t))^2)^{1/2}, & \text{若} p\ge 2, \end{cases}$$

利用 Minkowski 不等式，对每一 h 和 $p \geq 1$, 我们得

$$\tilde{\sigma}(p,2h) \leq 2\tilde{\sigma}(p,h). \tag{3.3.3}$$

由 (3.3.3) 对每一 $h > 0$ 得

$$\tilde{\sigma}(p,h) + \frac{1}{\tilde{\sigma}(p,h)} \leq 4\Big(h + \frac{1}{h}\Big)\Big(\tilde{\sigma}(p,1) + \frac{1}{\tilde{\sigma}(p,1)}\Big). \tag{3.3.4}$$

由 (3.3.4), 引理 3.1.3 和定理 3.1.3 即得 (3.3.2).

注 3.3.1　设 $\sigma_*(p,h)$ 和 $\tilde{\sigma}_*(p,h)$ 是非降函数使得对每一 $h > 0$, $\sigma(p,h) \leq \sigma_*(p,h)$ 且 $\tilde{\sigma}(p,h) \leq \tilde{\sigma}_*(p,h)$. 假设对某 $\alpha > 0$, $\sigma_*(p,h)/h^\alpha$ 和 $\tilde{\sigma}_*(p,h)/h^\alpha$ 在 $(0,a^*)$ 上是拟增的. 显然, 若 $\sigma(p,h)$ 和 $\tilde{\sigma}(p,h)$ 分别被 $\sigma_*(p,h)$ 和 $\tilde{\sigma}_*(p,h)$ 代替, (3.1.17) 仍正确. 因此, 当 $\sigma_*(p,a_T)$ 和 $\tilde{\sigma}_*(p,a_T)$ 分别被 $\sigma(p,a_T)$ 和 $\tilde{\sigma}(p,a_T)$ 代替时, (3.3.2) 仍正确.

命题 3.3.2　设 a_T 和 b_T 是正连续函数. 假设 (3.1.15) 及下式成立

$$\frac{\log(b_T/a_T)}{\log\log(a_T + (1/a_T))} \to \infty, \quad T \to \infty, \tag{3.3.5}$$

且对每一 $\varepsilon > 0$ 还满足

$$\limsup_{T\to\infty} \max_{(b_T/a_T)^\varepsilon \leq j \leq b_T/a_T} \max_{k\geq1}\{\sigma_k^{-2}(a_T) \cdot E[(X_k(a_T) - X_k(0))(X_k(ja_T) - X_k((j-1)a_T))]\} \leq 0. \tag{3.3.6}$$

则有

$$\liminf_{T\to\infty} \sup_{0\leq t\leq b_T} \sup_{0\leq s\leq a_T} \frac{\|Y(t+s) - Y(t)\|_{l^p}}{\tilde{\sigma}(p,a_T)(2\log(b_T/a_T))^{1/2}} \geq 1 \quad \text{a.s.} \tag{3.3.7}$$

证明 令 $1 < \theta < 65/64$. 定义

$$A_k = \left\{T; 2^k \le \frac{b_T}{a_T} \le 2^{k+1}\right\}, \quad k \ge 0,$$
$$A_{k,j} = \{T; \theta^{j-1} \le \tilde{\sigma}(p, a_T) \le \theta^j, T \in A_k\}, \quad -\infty < j < \infty,$$
$$b(T_{k,j}) = \inf\{b_T; T \in A_{k,j}\}, \quad a_{k,j} = a(T^*_{k,j}) = \inf\{a_T; T \in A_{k,j}\}.$$

由 (3.3.4) 和 (3.3.5) 可知，对充分大的 k 有

$$\text{当}|j| \ge e^k \text{ 时}, \quad A_{k,j} = \phi. \tag{3.3.8}$$

另外，易知

$$2^k \le \frac{b(T_{k,j})}{a(T_{k,j})} \le \frac{b(T_{k,j})}{a(T^*_{k,j})} \le \frac{b(T^*_{k,j})}{a(T^*_{k,j})} \le 2^{k+1}. \tag{3.3.9}$$

从而

$$\begin{aligned}
&\liminf_{T\to\infty} \sup_{0\le t\le b_T} \sup_{0\le s\le a_T} \frac{\|Y(t+s)-Y(t)\|_{l^p}}{\tilde{\sigma}(p,a_T)(2\log(b_T/a_T))^{1/2}} \\
&\ge \liminf_{k\to\infty} \inf_j \inf_{T\in A_{k,j}} \sup_{0\le t\le b_T} \sup_{0\le s\le a_T} \frac{\|Y(t+s)-Y(t)\|_{l^p}}{\tilde{\sigma}(p,a_T)(2\log(b_T/a_T))^{1/2}} \\
&\ge \liminf_{k\to\infty} \min_{|j|\le e^k} \sup_{0\le t\le b(T_{k,j})} \sup_{0\le s\le a_{k,j}} \frac{\|Y(t+s)-Y(t)\|_{l^p}}{\theta^j(2\log 2^{k+1})^{1/2}} \\
&\ge \liminf_{k\to\infty} \min_{|j|\le e^k} \max_{0\le i\le 2^{k(2-\theta)}} \|Y(i2^{k(\theta-1)}a_{k,j}+a_{k,j})-Y(i2^{k(\theta-1)}a_{k,j})\|_{l^p} / \\
&\quad \theta\tilde{\sigma}(p,a_{k,j})(2\log 2^k)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

下面分别对 $1 \le p < 2$ 和 $2 \le p < \infty$ 两种情形进行证明.

情形 I. $1 \le p < 2$. 此时由 (3.1.17) 我们有

$$\begin{aligned}
&\|Y(i2^{k(\theta-1)}a_{k,j}+a_{k,j})-Y(i2^{k(\theta-1)}a_{k,j})\|_{l^p} \\
&\quad \ge \left[\sum_{v=1}^{\infty} \sigma_v(a_{k,j})^{2p/(2-p)}\right]^{-(p-1)/p} \sum_{v=1}^{\infty} \sigma_v(a_{k,j})^{2(p-1)/(2-p)} \\
&\quad\quad \cdot (X_v(i2^{k(\theta-1)}a_{k,j}+a_{k,j}) - X_v(i2^{k(\theta-1)}a_{k,j})).
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

对 $k=1,2,\ldots$, $|j|\le e^k$, $0\le i\le 2^{k(2-\theta)}$, 考察

$$\begin{aligned}
&\xi(k,j;i)\\
&=\Big[\sum_{v=1}^{\infty}\sigma_v(a_{k,j})^{2(p-1)/(2-p)}(X_v(i2^{k(\theta-1)}a_{k,j}+a_{k,j})\\
&\quad -X_v(i2^{k(\theta-1)}a_{k,j}))\Big]\Big/\Big[\tilde{\sigma}(p,a_{k,j})(\sum_{v=1}^{\infty}\sigma_v(a_{k,j})^{2p/(2-p)})^{(p-1)/p}\Big]\\
&=\Big[\sum_{v=1}^{\infty}\sigma_v(a_{k,j})^{2(p-1)/(2-p)}(X_v(i2^{k(\theta-1)}a_{k,j}+a_{k,j})\\
&\quad -X_v(i2^{k(\theta-1)}a_{k,j}))\Big]\Big/\Big(\sum_{v=1}^{\infty}\sigma_v(a_{k,j})^{2p/(2-p)}\Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

对固定的 j,k 和 $0\le i<m\le 2^{k(2-\theta)}$, 由于 $\{X_v(t);t\ge 0\}_{v=1}^{\infty}$ 是具有平稳增量的独立 Gauss 过程序列, 我们有

$$\begin{aligned}
&E\{\xi(k,j;i)\xi(k,j;m)\}\\
&=\Big(\sum_{v=1}^{\infty}\sigma_v(a_{k,j})^{2p/(2-p)}\Big)^{-1}\sum_{v=1}^{\infty}\sigma_v(a_{k,j})^{4(p-1)/(2-p)}\\
&\quad\cdot E\{(X_v(a_{k,j})-X_v(0))(X_v((m-i)2^{k(\theta-1)}a_{k,j}+a_{k,j})\\
&\quad -X_v((m-i)2^{k(\theta-1)}a_{k,j}))\}.
\end{aligned}\tag{3.3.12}$$

注意到

$$\sum_{v=1}^{\infty}\sigma_v(a_{k,j})^{4(p-1)/(2-p)}\sigma_v^2(a_{k,j})=\sum_{v=1}^{\infty}\sigma_v(a_{k,j})^{2p/(2-p)},$$

利用假设 (3.3.6), 由 (3.3.12), 对每一 $|j|\le e^k$, $0\le i<m\le 2^{k(2-\theta)}$, 当 k 充分大时有

$$E\xi(k,j;i)\xi(k,j;m)\le\theta-1.\tag{3.3.13}$$

又显然有

$$E\xi^2(k,j;i)=1.\tag{3.3.14}$$

设 $\{\eta_i; 0 \le i \le 2^{k(2-\theta)}\}$ 和 τ 为独立正态随时机变量序列，均值为 0 且 $E\eta_i^2 = 2-\theta$, $0 \le i \le 2^{k(2-\theta)}$, $E\tau^2 = \theta - 1$. 定义 $\tau_i = \tau + \eta_i$, $0 \le i \le 2^{k(2-\theta)}$. 注意到对充分大的 k

$$E\xi^2(k,j;i) = E\tau_i^2 = 1, \quad 0 \le i \le 2^{k(2-\theta)},$$

$$E\{\xi(k,j;i)\xi(k,j;m)\} \le E\{\tau_i\tau_m\}, \quad 0 \le i \ne m \le 2^{k(2-\theta)},$$

从而，由 Slepian 不等式对充分大的 k 有

$$\begin{aligned}
&P\Big\{\max_{0\le i\le 2^{k(2-\theta)}} \xi(k,j;i) \le ((2-\theta)^2 - 2(\theta-1)^{1/2})(2\log 2^k)^{1/2}\Big\} \\
&\le P\Big\{\max_{0\le i\le 2^{k(2-\theta)}} \tau_i \le ((2-\theta)^2 - 2(\theta-1)^{1/2})(2\log 2^k)^{1/2}\Big\} \\
&\le P\Big\{\max_{0\le i\le 2^{k(2-\theta)}} \eta_i \le (2-\theta)^2(2\log 2^k)^{1/2}\Big\} \\
&\quad + P\{\tau \ge 2(\theta-1)^{1/2}(2\log 2^k)^{1/2}\} \\
&\le \Big(\Phi((2-\theta)^{3/2}(2\log 2^k)^{1/2})\Big)^{2^{k(2-\theta)}} + \exp(-4\log 2^k) \\
&\le 2^{-4k} + \Big(1 - \frac{\exp(-(2-\theta)^3\log 2^k)}{3(1+(2-\theta)^{3/2}(2\log 2^k)^{1/2})}\Big)^{2^{k(2-\theta)}} \\
&\le 2^{-4k} + \exp\Big(-\frac{2^{k(2-\theta)}\cdot 2^{-k(2-\theta)^3}}{k}\Big) \\
&\le 2^{-4k} + \exp\Big(-\frac{2^{k(2-\theta)(\theta-1)}}{k}\Big).
\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

综合上述不等式，并应用 Borel-Cantelli 引理得

$$\begin{aligned}
&\liminf_{k\to\infty} \min_{|j|\le e^k} \max_{0\le i\le 2^{k(2-\theta)}} \frac{\|Y(i2^{k(\theta-1)}a_{k,j} + a_{k,j}) - Y(i2^{k(\theta-1)}a_{k,j})\|_{l^p}}{\theta\tilde{\sigma}(p,a_{k,j})(2\log 2^k)^{1/2}} \\
&\ge \frac{(2-\theta)^2 - 2(\theta-1)^{1/2}}{\theta} \quad \text{a.s.}
\end{aligned} \tag{3.3.16}$$

由 (3.3.10) 和 $1 < \theta < 65/64$ 的任意性就得 (3.3.7) 成立.

情形 II. $p \ge 2$. 取 $N_{k,j}$ 使得 $\sigma_{N_{k,j}}(a_{k,j}) = \sigma^*(a_{k,j})$. 显然

$$
\begin{aligned}
&\frac{\|Y(i2^{k(\theta-1)}a_{k,j}+a_{k,j})-Y(i2^{k(\theta-1)}a_{k,j})\|_{l^p}}{\tilde{\sigma}(p,a_{k,j})}\\
&\quad\geq \frac{X_{N_{k,j}}(i2^{k(\theta-1)}a_{k,j}+a_{k,j})-X_{N_{k,j}}(i2^{k(\theta-1)}a_{k,j})}{\sigma_{N_{k,j}}(a_{k,j})}.
\end{aligned}
$$

沿着情形 I 的证明，我们可得此时 (3.3.7) 仍成立.

注 3.3.2　从命题 3.3.2 和证明我们也可推得：若 (3.3.5) 被下述条件代替:

$$
\log\log\Big(a_T+\frac{1}{a_T}\Big)=O\Big(\log\frac{b_T}{a_T}\Big)\quad 且\quad \frac{b_T}{a_T}\to\infty,\quad T\to\infty,
$$

则 (3.3.7) 仍成立. 此外，若条件 (3.3.5) 和 (3.3.6) 被下述条件代替:

$$
\frac{\log(b_T/a_T)}{\log\log\log(a_T+1/a_T)}\to\infty,\quad T\to\infty
$$

且对每一 $k\geq 1$, $0\leq a<b\leq c$

$$
E\{(X_k(a)-X_k(0))(X_k(c)-X_k(b))\}\leq 0,
$$

那么 (3.3.7) 仍成立.

现在我们给出本节中的主要结果，它们是由 Csörgő 和 Shao (1993) 得到的.

定理 3.3.1　设 a_T $(T>0)$ 是正连续函数. 令 $a^*=\sup_{T>0}a_T$. 假设对某 $\alpha>0$, $\tilde{\sigma}(p,h)/h^\alpha$ 和 $\sigma(p,h)/h^\alpha$ 在 $(0,a^*)$ 上是拟增的，并且对每一 $\varepsilon>0$ 有

$$
\lim_{T\to\infty}\frac{\log(T/a_T)}{\log\log T}=\infty, \tag{3.3.17}
$$

$$
\sigma(p,a_T)=o\Big(\tilde{\sigma}(p,a_T)\Big(\log\frac{T}{a_T}\Big)^{1/2}\Big),\quad T\to\infty, \tag{3.3.18}
$$

$$
\begin{aligned}
\limsup_{T\to\infty}\max_{(T/a_T)^\varepsilon\leq j\leq T/a_T}\max_{k\geq 1}\{\sigma_k^{-2}(a_T)\cdot E[(X_k(a_T)-X_k(0))(X_k(ja_T)\\
-X_k((j+1)a_T))]\}\leq 0.
\end{aligned}\tag{3.3.19}
$$

那么我们有

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le a_T}\frac{\|Y(t+s)-Y(t)\|_{l^p}}{\tilde{\sigma}(p,a_T)(2\log(T/a_T))^{1/2}}=1 \quad \text{a.s.} \qquad (3.3.20)$$

定理 3.3.2 设 a_T $(T>0)$ 是正连续函数, 满足 (3.3.17). 假设对某 $\alpha>0$, $\sigma(p,h)/h^\alpha$ 和 $\tilde{\sigma}(p,h)/h^\alpha$ 在 $(0,a^*)$ 上是拟增的, 且

$$\tilde{\sigma}(p,a_T)\Big(\log\frac{T}{a_T}\Big)^{1/2}=o(\sigma(p,a_T)), \quad T\to\infty. \qquad (3.3.21)$$

那么我们有

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le a_T}\frac{\|Y(t+s)-Y(t)\|_{l^p}}{\delta_p\sigma(p,a_T)}=1 \quad \text{a.s.} \qquad (3.3.22)$$

定理 3.3.3 假设对某 $\alpha>0$, $\tilde{\sigma}(p,h)/h^\alpha$ 在 $(0,1)$ 上是拟增的. 还假设对每一 $\varepsilon>0$

$$\sigma(p,h)=o\Big(\tilde{\sigma}(p,h)\Big(\log\frac{1}{h}\Big)^{1/2}\Big), \quad h\to 0, \qquad (3.3.23)$$

$$\limsup_{h\to 0}\max_{h^{-\varepsilon}\le j\le h^{-1}}\max_{k\ge 1}\frac{E[(X_k(h)-X_k(0))(X_k(jh)-X_k((j-1)h))]}{\sigma_k^2(h)} \le 0. \qquad (3.3.24)$$

那么我们有

$$\lim_{h\to 0}\sup_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\frac{\|Y(t+s)-Y(t)\|_{l^p}}{\tilde{\sigma}(p,h)(2\log(1/h))^{1/2}}=1 \quad \text{a.s.} \qquad (3.3.25)$$

定理 3.3.4 假设对某 $\alpha>0$, $\sigma(p,h)/h^\alpha$ 在 $(0,1)$ 上是拟增的, 且

$$\tilde{\sigma}(p,h)(\log\frac{1}{h})^{1/2}=o(\sigma(p,h)), \quad h\to 0. \qquad (3.3.26)$$

那么我们有

$$\lim_{h\to 0}\sup_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\frac{\|Y(t+s)-Y(t)\|_{l^p}}{\delta_p\sigma(p,h)}=1 \quad \text{a.s.} \qquad (3.3.27)$$

注 3.3.3　若对任意的 $0 \le a \le b \le c \le d < \infty$ 和每一 $k \ge 1$ 有

$$E\{(X_k(b)-X_k(a))(X_k(d)-X_k(c))\} \le 0, \tag{3.3.28}$$

显然，(3.3.19) 和 (3.3.24) 满足. 特别地，若对每一 $k \ge 1$, $\sigma_k^2(h)$ 在 $(0,\infty)$ 上是凹函数，则 (3.3.28) 成立，从而 (3.3.19) 和 (3.3.24) 被满足. 事实上，条件 (3.3.19) 或 (3.3.24) 的确比条件 (3.3.28) 弱.

注 3.3.4　值得指出的是：在定理 3.3.1 和 3.3.3 中的正则化常数是完全不同于定理 3.3.2 和 3.3.4 的. 后两定理的结论看起来是令人惊奇的. 然而，在定理 3.3.2 和定理 3.3.4 的条件下，分别有

$$\|Y(a_T)-Y(0)\|_{l^p} \sim \delta_p\sigma(p,a_T), \quad T\to\infty$$

和

$$\|Y(h)-Y(0)\|_{l^p} \sim \delta_p\sigma(p,h), \quad h\to 0.$$

由此可得，它们的结论很像大数律. 另一方面，定理 3.3.1 和 3.3.3 的结论分别可与标准 Wiener 过程的大增量和连续模相比较. (参见定理 0.1,0.2 或 Csörgő 和 Révész 1981, 第一章).

定理 3.3.1 的证明　这是命题 3.3.1 和 3.3.2 的直接推论.

定理 3.3.2 的证明　由命题 3.3.1 我们有

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le a_T}\frac{\|Y(t+s)-Y(t)\|_{l^p}}{\delta_p\sigma(p,a_T)} \le 1 \quad \text{a.s.}$$

故只需证明

$$\liminf_{T\to\infty}\sup_{0\le s\le a_T}\frac{\|Y(s)-Y(0)\|_{l^p}}{\delta_p\sigma(p,a_T)} \ge 1 \quad \text{a.s.} \tag{3.3.29}$$

设 $1<\theta<65/64$. 定义

$$B_k=\left\{T;\ 2^k \le \frac{T}{a_T} \le 2^{k+1}\right\}, \quad k\ge 0,$$

$$B_{k,j}=\{T;\ \theta^j \le \sigma(p,a_T) \le \theta^{j+1}, T\in B_k\}, \quad -\infty<j<\infty,$$

$$a_{k,j}=a(T_{k,j})=\inf\{a_T;\ T\in B_{k,j}\}.$$

与 (3.3.4) 类似，我们有

$$\sigma(p,a_T)\le 2(1+a_T)\sigma(p,1),$$

因此并注意到 (3.3.17), 当 k 充分大时有

$$B_{k,j}=\phi,\quad 若\ |j|>e^k.$$

所以

$$\begin{aligned}&\liminf_{T\to\infty}\sup_{0\le s\le a_T}\frac{\|Y(s)-Y(0)\|_{l^p}}{\delta_p\sigma(p,a_T)}\\ &\ge\liminf_{k\to\infty}\min_{|j|\le e^k}\inf_{T\in B_{k,j}}\sup_{0\le s\le a_T}\frac{\|Y(s)-Y(0)\|_{l^p}}{\delta_p\sigma(p,a_T)}\\ &\ge\liminf_{k\to\infty}\min_{|j|\le e^k}\frac{\|Y(a_{k,j})-Y(0)\|_{l^p}}{\theta\delta_p\sigma(p,a_{k,j})}.\end{aligned}\tag{3.3.30}$$

应用 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}E\|Y(a_T)-Y(0)\|_{l^p}&\ge\frac{(E\|Y(a_T)-Y(0)\|_{l^p}^p)^{(2p-1)/p}}{(E\|Y(a_T)-Y(0)\|_{l^p}^{2p})^{(p-1)/p}}\\ &\ge\frac{(\delta_p^p\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^p(a_T))^{(2p-1)/p}}{\left((\delta_p^p\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^p(a_T))^2+\delta_{2p}^{2p}\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^{2p}(a_T)\right)^{(p-1)/p}}\\ &\ge\frac{(\delta_p^p\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^p(a_T))^{(2p-1)/p}}{\left((\delta_p^p\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^p(a_T))^2+\delta_{2p}^{2p}\sigma^{*p}(a_T)\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^p(a_T)\right)^{(p-1)/p}}\\ &=\frac{\delta_p\sigma(p,a_T)}{\left(1+\delta_{2p}^{2p}\delta_p^{-p}(\sigma^*(a_T)/\sigma(p,a_T))^p\right)^{(p-1)/p}}.\end{aligned}\tag{3.3.31}$$

从而，由 (3.3.21)

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{E\|Y(a_T)-Y(0)\|_{l^p}}{\delta_p\sigma(p,a_T)}\ge 1.\tag{3.3.32}$$

由 (3.1.18) 和 (3.3.32) 即得, 对每一充分大的 k 及 $|j|\le e^k$,

$$
\begin{aligned}
P&\left\{\frac{\|Y(a_{k,j})-Y(0)\|_{l^p}}{\delta_p\sigma(p,a_{k,j})}\le 2-\theta\right\}\\
&\le P\Big\{\|Y(a_{k,j})-Y(0)\|_{l^p}-E\|Y(a_{k,j})-Y(0)\|_{l^p}\\
&\qquad\le -\frac{\theta-1}{2}\delta_p\sigma(p,a_{k,j})\Big\}\\
&\le 2\exp\Big(-\frac{(\theta-1)^2\delta_p^2\sigma^2(p,a_{k,j})}{\delta\tilde\sigma^2(p,a_{k,j})}\Big)\\
&\le 2\exp\Big(-4\log\frac{T_{k,j}}{a(T_{k,j})}\Big)\\
&\le 2\cdot 2^{-4k},
\end{aligned}
\tag{3.3.33}
$$

结合 Borel-Cantelli 引理得

$$
\liminf_{k\to\infty}\min_{|j|\le e^k}\frac{\|Y(a_{k,j})-Y(0)\|_{l^p}}{\theta\delta_p\sigma(p,a_{k,j})}\ge\frac{2-\theta}{\theta}\quad\text{a.s.}\tag{3.3.34}
$$

由 (3.3.30), (3.3.34) 和 $\theta>1$ 的任意性得证 (3.3.29) 成立.

定理 3.3.3 的证明 由命题 3.3.2, 我们有

$$
\liminf_{h\to 0}\sup_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\frac{\|Y(t+s)-Y(t)\|_{l^p}}{\tilde\sigma(p,h)(2\log(1/h))^{1/2}}\ge 1\quad\text{a.s.}
$$

故只需证明

$$
\limsup_{h\to 0}\sup_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\frac{\|Y(t+s)-Y(t)\|_{l^p}}{\tilde\sigma(p,h)(2\log(1/h))^{1/2}}\le 1\quad\text{a.s.}\tag{3.3.35}
$$

对任一固定的 $\varepsilon>0$, 令 $\sigma_*(p,h)=\varepsilon\sup_{0\le s\le h}\tilde\sigma(p,h)(\log(1/s))^{1/2}$, $0<h\le 1$. 注意到 $\tilde\sigma(p,h)/h^\alpha$ 是拟增的, 存在与 ε 无关的常数 c_0, 使得对 $0<h<1$ 有

$$
\begin{aligned}
\varepsilon\sigma(p,h)\Big(\log\frac1h\Big)^{1/2}&\le\sigma_*(p,h)=\varepsilon\sup_{0\le s\le h}\frac{\tilde\sigma(p,s)}{s^\alpha}s^\alpha\Big(\log\frac1s\Big)^{1/2}\\
&\le\varepsilon c_0\tilde\sigma(p,h)\Big(\log\frac1h\Big)^{1/2}.
\end{aligned}
\tag{3.3.36}
$$

其次，$\sigma_*(p,h)$ 是非降的，$\sigma_*(p,h)/h^{\alpha/2}$ 是拟增的，且由 (3.3.23)，对充分小的 h 成立 $\sigma(p,h) \le \sigma_*(p,h)$. 从而由注 3.3.1, 我们得

$$\limsup_{h\to 0} \sup_{0\le t\le 1} \sup_{0\le s\le h} \frac{\|Y(t+s)-Y(t)\|_{l^p}}{\tilde{\sigma}(p,h)(2\log(1/h))^{1/2}+\sigma_*(p,h)} \le 1 \quad \text{a.s.}$$

这样，由 (3.3.36) 有

$$\limsup_{h\to 0} \sup_{0\le t\le 1} \sup_{0\le s\le h} \frac{\|Y(t+s)-Y(t)\|_{l^p}}{\tilde{\sigma}(p,h)(2\log(1/h))^{1/2}} \le 1+\varepsilon c_0.$$

由 ε 的任意性得证 (3.3.35) 成立.

定理 3.3.4 的证明 类似于 (3.3.35) 的证明，由命题 3.3.1 我们有

$$\limsup_{h\to 0} \sup_{0\le t\le 1} \sup_{0\le s\le h} \frac{\|Y(t+s)-Y(t)\|_{l^p}}{\delta_p \sigma(p,h)} \le 1 \quad \text{a.s.} \tag{3.3.37}$$

另一方面，沿着 (3.3.29) 的证明思路，我们也可得

$$\liminf_{h\to 0} \sup_{0\le s\le h} \frac{\|Y(s)-Y(0)\|_{l^p}}{\delta_p \sigma(p,h)} \ge 1 \quad \text{a.s.} \tag{3.3.38}$$

综合 (3.3.37) 和 (3.3.38) 就得证 (3.3.27). 定理证毕.

作为上述定理的应用，我们来给出 l^p 值分数 Wiener 过程的连续模及 l^p 值分数 O-U 过程的连续模.

设 $\{\xi(t); t\ge 0\}$ 为具有平稳增量、零均值的 Gauss 过程. 称 $\xi(t)$ 是阶为 γ 的分数 Wiene 过程 (或称为自相似 Gauss 过程), 若 $E\xi^2(t)=t^{2\gamma}$, 其中 $0<\gamma<1$. 当 $\gamma=1/2$ 时，$\xi(t)$ 就是熟知的 Wiener 过程.

设 $p\ge 1$, $\{c_n; n\ge 1\}$ 为非负数列. 令

$$c(p) = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^p\Big)^{1/p}, \tag{3.3.39}$$

$$\tilde{c}(p)=\begin{cases} c\left(\dfrac{2p}{2-p}\right), & \text{当} 1\le p<2, \\ \max\limits_{k\ge 1} c_k, & \text{当} p\ge 2. \end{cases} \tag{3.3.40}$$

设 $\{Y(t);t\ge 0\}=\{c_k\xi_k(t);t\ge 0\}_{k=1}^{\infty}$，其中 $\xi_k(t)$ 是独立的 γ 阶 $(0<\gamma<1)$ 分数 Wiener 过程. 记 $\sigma_k^2(h)=c_k^2E\xi_k^2(h)=c_k^2h^{2\gamma}$. 定义 $\sigma(p,h)$ 和 $\tilde{\sigma}(p,h)$ 如前. 显然，我们有

$$\sigma(p,h)=h^{\gamma}c(p),\quad \tilde{\sigma}(p,h)=h^{\gamma}\tilde{c}(p). \tag{3.3.41}$$

假设

$$0<\sum_{k=1}^{\infty}c_k^p<\infty. \tag{3.3.42}$$

则由定理 3.1.3, $Y(\cdot)\in l^p$ 具有 a.s 连续的样本轨道. 注意到对每一 $k\ge 1$, $a>0$, $j>2$ 有

$$\begin{aligned} &\frac{Ec_k\xi_k(a)(c_k\xi_k(ja)-c_k\xi_k((j-1)a))}{\sigma_k^2(a)} \\ &=\frac{E\xi_1(a)(\xi_1(ja)-\xi_1((j-1)a))}{E\xi_1^2(a)} \\ &=\frac{1}{2}((j+1)^{2\gamma}+(j-1)^{2\gamma}-2j^{2\gamma}) \end{aligned}$$

且

$$\lim_{j\to\infty}((j+1)^{2\gamma}+(j-1)^{2\gamma}-2j^{2\gamma})=0,$$

条件 (3.3.19) 和 (3.3.24) 被满足. 从而由定理 3.3.1, 3.3.3, 我们得到下述推论.

推论 3.3.1 设 $p\ge 1$, $\{\xi_k(t);t\ge 0\}$ 为独立的 γ $(0<\gamma<1)$ 阶分数 Wiener 过程. 设 $\{Y(t);t\ge 0\}=\{c_k\xi_k(t);t\ge 0\}_{k=1}^{\infty}$. 假设 (3.3.42) 被满足. 则对任何满足 $\lim_{T\to\infty}\log(T/a_T)/\log\log T=\infty$ 的正连续函数 a_T, 我们有

$$\lim_{h\to 0}\sup_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\frac{\|Y(t+s)-Y(t)\|_{l^p}}{h^{\gamma}\tilde{c}(p)(2\log(1/h))^{1/2}}=1 \quad \text{a.s.,} \tag{3.3.43}$$

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le a_T}\frac{\|Y(t+s)-Y(t)\|_{l^p}}{a_T^{\gamma}\tilde{c}(p)(2\log(T/a_T))^{1/2}}=1\quad \text{a.s.}\qquad (3.3.44)$$

设 $\{Y(t);t\ge 0\}=\{X_k(t);t\ge 0\}_{k=1}^{\infty}$ 为独立 O-U 过程，具有系数 γ_k 和 λ_k. 易知

$$\{X_k(t);t\ge 0\}_{k=1}^{\infty}\quad 和\quad \left\{\left(\frac{\gamma_k}{\lambda_k}\right)^{1/2}\frac{W_k(e^{2\lambda_k t})}{e^{\lambda_k t}};t\ge 0\right\}_{k=1}^{\infty}$$

有相同的分布，其中 $\{W_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ 是独立标准 Wiener 过程. 因此，不失一般性，可写

$$X_k(t)=\left(\frac{\gamma_k}{\lambda_k}\right)^{1/2}\frac{W_k(e^{2\lambda_k t})}{e^{\lambda_k t}},\quad t\ge 0, k=1,2,\ldots$$

且保持 $Y(\cdot)$ 的轨道性质不变. 这一关系式和分数 Wiener 过程的概念自然导致引入分数 O-U 过程并研究它们的轨道性质.

设 $\{\xi(t);t\ge 0\}$ 为 γ $(0<\gamma<1)$ 阶分数 Wiener 过程. 平稳 Gauss 过程 $\{X(t);t\ge 0\}$ 称为 γ 阶的具有系数 a 和 b 的 O-U 过程，若

$$\{X(t);t\ge 0\}\quad 和\quad \left\{\left(\frac{a}{b}\right)^{1/2}\frac{\xi(e^{2bt})}{e^{2\gamma bt}};t\ge 0\right\}$$

具有相同的分布，即 $EX(t)=0$, 且对所有 $t,s\ge 0$ 有

$$E\{X(t)X(s)\}=\frac{a}{2b}(e^{2\gamma b(t-s)}+e^{2\gamma b(s-t)}-|e^{b(t-s)}-e^{b(s-t)}|^{2\gamma}),\qquad (3.3.45)$$

其中 $a\ge 0, b>0$.

显然，当 $\gamma=1/2$ 时，$\{X(t);t\ge 0\}$ 就是通常的 O-U 过程.

下面设 $\{Y(t);t\ge 0\}=\{X_k(t);t\ge 0\}_{k=1}^{\infty}$ 为 γ 阶独立分数 O-U 过程序列，具有系数 γ_k 和 λ_k, 其中 $0<\gamma<1$, $\gamma_k\ge 0$, $\lambda_k>0$. 对 $h\ge 0$, $k=1,2,\ldots$, 令

$$\begin{aligned}\sigma_k^2(h)&=E(X_k(t+h)-X_k(t))^2\\&=\frac{\gamma_k}{\lambda_k}(2+(e^{\lambda_k h}-e^{-\lambda_k h})^{2\gamma}-e^{2\gamma\lambda_k h}-e^{-2\gamma\lambda_k h}).\end{aligned}$$

设 $p \geq 1$, 定义 $\sigma(p,h), \tilde{\sigma}(p,h)$ 的 δ_p 如前. 由定理 3.3.1 我们得

推论 3.3.2 假设对某 $\alpha > 0$, $\tilde{\sigma}(p,h)/h^\alpha$ 在 $(0,1)$ 上是拟增的. 若

$$\sigma(p,h) = o\Big(\tilde{\sigma}(p,h)\Big(\log\frac{1}{h}\Big)^{1/2}\Big), \quad h \to 0, \tag{3.3.46}$$

那么

$$\lim_{h\to 0}\sup_{0\leq t\leq 1}\sup_{0\leq s\leq h}\frac{\|Y(t+s)-Y(t)\|_{l^p}}{\tilde{\sigma}(p,h)(2\log(1/h))^{1/2}} = 1 \quad \text{a.s.} \tag{3.3.47}$$

假设对某 $\alpha > 0$, $\sigma(p,h)/h^\alpha$ 在 $(0,1)$ 上是拟增的. 若

$$\tilde{\sigma}(p,h)\Big(\log\frac{1}{h}\Big)^{1/2} = o(\sigma(p,h)), \quad h \to 0, \tag{3.3.48}$$

那么

$$\lim_{h\to 0}\sup_{0\leq t\leq 1}\sup_{0\leq s\leq h}\frac{\|Y(t+s)-Y(t)\|_{l^p}}{\delta_p\sigma(p,h)} = 1 \quad \text{a.s.} \tag{3.3.49}$$

证明 由定理 3.3.3 和 3.3.4, 只需验证

$$\limsup_{h\to 0}\max_{\log(1/h)\leq j\leq 1/h}\max_{k\geq 1}\frac{E\{(X_k(h)-X_k(0))(X_k(jh)-X_k((j-1)h))\}}{\sigma_k^2(h)} \leq 0. \tag{3.3.50}$$

我们可以验证, 若 $0 < \gamma \leq 1/2$, $\sigma_k^2(h)$ 在 $(0,\infty)$ 上是凹函数, 那么这时 (3.3.50) 被满足.

下面考察 $1/2 < \gamma < 1$ 的情形. 对每一 $h > 0$, $j \geq 6$, $k \geq 1$ 和对某 $(j-2)\lambda_k h \leq \xi \leq j\lambda_k h$, 我们有

$$\begin{aligned}&\frac{E\{(X_k(h)-X_k(0))(X_k(jh)-X_k((j-1)h))\}}{\sigma_k^2(h)}\\ &= \frac{f(j\lambda_k h)+f((j-2)\lambda_k h)-2f((j-1)\lambda_k h)}{2(2+f(\lambda_k h))}\\ &= \frac{f''(\xi)(\lambda_k h)^2}{2(2+f(\lambda_k h))}.\end{aligned}$$

其中

$$f(x)=(e^{x}-e^{-x})^{2\gamma}-e^{2\gamma x}-e^{-2\gamma x}.$$

通过一些初等计算可以证明 (3.3.50) 成立.

下述结论通过系数 γ_k,λ_k 和阶 γ 应满足的条件, 给出了推论 3.3.2 的某些特殊情形.

推论 3.3.3 假设

$$0<\sum_{k=1}^{\infty}(\gamma_k/\lambda_k)^{p/2}\lambda_k^{\gamma p}<\infty.$$

那么我们有

$$\lim_{h\to 0}\sup_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\frac{\|Y(t+s)-Y(t)\|_{l^p}}{\Gamma(p,\gamma)h^{\gamma}(2\log(1/h))^{1/2}}=1\quad \text{a.s.},$$

其中

$$\Gamma(p,\gamma)=\begin{cases}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{\gamma_k}{\lambda_k}\right)^{p/(2-p)}(2\lambda_k)^{2\gamma p/(2-p)}\right)^{(2-p)/2p}, & \text{当}1\le p<2\text{ 时},\\ \max\limits_{k\ge 1}(\gamma_k/\lambda_k)^{1/2}\cdot(2\lambda_k)^{\gamma}, & \text{当}p\ge 2\text{ 时}.\end{cases}$$

特别地, 取 $\gamma=1/2, p=2$, 我们得到 O-U 过程生成的 l^2 模平方过程:

$$\chi^2(t)=\|Y(t)\|_{l^2}^2=\sum_{k=1}^{\infty}X_k^2(t).$$

令

$$\Gamma_0=E\chi^2(t)=\sum_{k=1}^{\infty}(\gamma_k/\lambda_k),\ \Gamma_1=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k,\ \Gamma_2=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k^2/\lambda_k,$$

$$B=\max_{k\ge 1}\gamma_k,\ M=\max_{k\ge 1}\gamma_k^2/\lambda_k.$$

那么从推论 3.3.3 可得

推论 3.3.4 假设 $\Gamma_0<\infty, \Gamma_1<\infty$, 则

$$\lim_{h\to 0}\sup_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\frac{|\chi^2(t+s)-\chi^2(t)|}{2(Bh\log(1/h))^{1/2}}=1\quad \text{a.s.}$$

Csörgő 和 Lin (1990) 也研究过当 $h \to 0$ 而 t 的值域趋向无穷时的另一形式的连续模. 此时正则化因子相当不一样.

定理 3.3.5 假设 $\Gamma_0 < \infty, \Gamma_2 < \infty$ 且当 $h \to 0$ 时 $T_h \uparrow$ 连续地递增趋向无穷. 则

$$\limsup_{h\to 0} \sup_{|t|\le T_h} \sup_{0\le s\le h} \frac{|\chi^2(t+s)-\chi^2(t)|}{(8Mh)^{1/2} 2\log(T_h/h)} \le 1.$$

若 T_h 还满足

$$(\log T_h)/\log(1/h) \to \infty, \quad h \to 0,$$

则有

$$\lim_{h\to 0} \sup_{|t|\le T_h} \frac{|\chi^2(t+h)-\chi^2(t)|}{(8Mh)^{1/2} 2\log T_h} = 1 \quad \text{a.s.},$$

$$\lim_{h\to 0} \sup_{|t|\le T_h} \sup_{0\le s\le h} \frac{|\chi^2(t+s)-\chi^2(t)|}{(8Mh)^{1/2} 2\log T_h} = 1 \quad \text{a.s.}$$

注 3.3.5 此时, 例如我们可取

$$T_h = \exp\{\log(1/h)\log\log\cdots\log(1/h)\},$$

其中对充分小的 $h>0$, $\log\log\cdots\log(1/h)$ 是指可取对数任意有限次, 这样, 过程 $\chi^2(\cdot)$ 的模为 $(8Mh)^{1/2} 2\log(1/h)\log\log\cdots\log(1/h)$.

定理 3.3.5 的证明的关键是下述引理.

引理 3.3.1 假设 $\Gamma_0 < \infty$ 且 $\Gamma_2 < \infty$. 对任意的 $\varepsilon > 0$ 存在 $h(\varepsilon) > 0$ 和 $C = C(\varepsilon) > 0$ 使得对任何 $T_h > h(\varepsilon)$, $h < h(\varepsilon)$, 对任一固定的 t 和任何 $x \ge (8/\varepsilon^2)(\Gamma_2/M)^{1/2}$ 有

$$P\{|\chi^2(t+h)-\chi^2(t)| \ge x(8Mh)^{1/2}\} \ge \frac{1}{7x}\exp\left(-\frac{x}{1+\varepsilon}\right),$$

$$P\{\sup_{|t|\le T_h} \sup_{0\le s\le h} |\chi^2(t+s)-\chi^2(t)| \ge x(8Mh)^{1/2}\}$$
$$\le (CT_h/h)\exp\left(-\frac{x}{1+\varepsilon}\right).$$

定理 3.3.5 和引理 3.3.1 和证明不在此陈述了.

3.3.2 当 $\sigma(p,h)$ 有界时的大增量

对某些 Gauss 过程, 上面定理的条件不被满足. 例如, 对 O-U 过程, 当 $h\to\infty$ 时 $\sigma(p,h)$ 是有界的. 现在我们对这类过程 $Y(\cdot)$ 来建立有关大增量的结果. 为此目的, 我们先给出引理 3.1.4 的一个精细的修正.

引理 3.3.2 设 $\mathcal{B}$ 是范数为 $\|\cdot\|$ 的 Banach 空间, $\{\Gamma(t);t\ge 0\}$ 是取值于 $\mathcal{B}$ 中的随机过程, P 是由 $\Gamma(\cdot)$ 生成的概率测度. 假设 $\Gamma(\cdot)$ 关于范数是 P-a.s. 连续的, 且对任何 $t\ge 0$, $h\ge 0$, $0<x^*\le x$ 存在非负单调非降函数 $\sigma_1(h)$ 和 $\sigma_2(h)$ 使得对某 $K,\gamma,\beta>0$

$$P\{\|\Gamma(t+h)-\Gamma(t)\|\ge x\sigma_1(h)+\sigma_2(h)\}\le K\exp(-\gamma x^{\beta}). \tag{3.3.51}$$

则对任给的 $2\le\alpha<e$, $0<\tau<1$, 对任何 $0\le h\le T$, $x\ge x^*$, 整数 $m\ge 3$ 和充分大的 $k=k(\tau)$ 有

$$\begin{aligned}P\Big\{&\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le h}\|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\|\ge x(\sigma_1(h+d(m,k)^{-1}h)\\&+\sigma_1(h,m,k))+\sigma_1^*(h,m,k)+\sigma_2(h+d(m,k)^{-1}h)+\sigma_2(h,m,k)\Big\}\\\le{}& 4K\Big(\frac{T}{h}+1\Big)d(m,k)^2\exp(-\gamma x^{\beta}),\end{aligned} \tag{3.3.52}$$

其中

$$d(m,k)=\underbrace{\alpha^{\cdot^{\cdot^{\alpha^k}}}}_{m\text{ 次}},$$

$$\sigma_1(h,m,k)=2^{2+\frac{1}{\beta}}d(m-3,k)^{-1}\int_{d(m-2,k+1-\tau)}^{\infty}\frac{\sigma_1(h\alpha^{-\alpha^y})}{y}dy,$$

$$\begin{aligned}\sigma_1^*(h,m,k)={}&2\Big(\frac{2}{\gamma}\Big)^{1/\beta}\Big(1-\Big(\frac{d(m-1,k+1-\tau)}{d(m-1,k+1)}\Big)^{1/\beta}\Big)^{-1}\\&\cdot\int_{d(m-1,k+1-\tau)^{1/\beta}}^{\infty}\sigma_1(h\alpha^{-y^{\beta}})dy,\end{aligned}$$

$$\sigma_2(h,m,k)=4d(m-3,k)^{-1}\int_{d(m-2,k+1-\tau)}^{\infty}\frac{\sigma_2(h\alpha^{-\alpha^y})}{y}dy.$$

证明 固定整数 $m \geq 3$. 依照引理 3.1.3 的证明, 对任意的实数 t, 令

$$t_j = [td(m,j)/h]/(d(m,j)/h).$$

我们有

$$\begin{aligned}\|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\| \leq & \|\Gamma((t+s)_k)-\Gamma(t_k)\| + \sum_{j=0}^{\infty} \|\Gamma((t+s)_{k+j+1}) \\ & - \Gamma((t+s)_{k+j})\| + \sum_{j=0}^{\infty} \|\Gamma(t_{k+j+1})-\Gamma(t_{k+j})\|.\end{aligned}$$

由于

$$\sup_{0\leq t\leq T}\sup_{0\leq s\leq h} |(t+s)_k - t_k| \leq h + d(m,k)^{-1}h,$$

$$\sup_{0\leq t\leq T}\sup_{0\leq s\leq h} |(t+s)_{k+j+1} - (t+s)_{k+j}| \leq hd(m,k+j+1)^{-1},$$

对任给的 $x \geq x^*$ 和 $x_j \geq x^*$, 由 (3.3.51) 得

$$\begin{aligned}P\Big\{ & \sup_{0\leq t\leq T}\sup_{0\leq s\leq h} \|\Gamma((t+s)_k)-\Gamma(t_k)\| \geq x\sigma_1(h+d(m,k)^{-1}h) \\ & + \sigma_2(h+d(m,k)^{-1}h)\Big\} \\ & \leq 2Kd(m,k)^2\Big(\frac{T}{h}+1\Big)\exp(-\gamma x^{\beta}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\Big\{ & \sup_{0\leq t\leq T}\sup_{0\leq s\leq h} \|\Gamma((t+s)_{k+j+1})-\Gamma((t+s)_{k+j})\| \\ & \geq x_j\sigma_1(hd(m,k+j+1)^{-1}) + \sigma_2(hd(m,k+j+1)^{-1})\Big\} \\ & \leq 2Kd(m,k+j+1)\Big(\frac{T}{h}+1\Big)\exp(-\gamma x_j^{\beta})\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}P\Big\{ & \sup_{0\leq t\leq T}\sup_{0\leq s\leq h} \|\Gamma(t_{k+j+1})-\Gamma(t_{k+j})\| \geq x_j\sigma_1(hd(m,k+j+1)^{-1}) \\ & + \sigma_2(hd(m,k+j+1)^{-1})\Big\} \\ & \leq 2Kd(m,k+j+1)\Big(\frac{T}{h}+1\Big)\exp(-\gamma x_j^{\beta}).\end{aligned}$$

现在令 $\gamma x_j^\beta = \gamma x^\beta + d(m-1,k+j+1)$. 则

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{\infty} d(m,k+j+1)\exp(-\gamma x_j^\beta)\\
&=\sum_{j=0}^{\infty} d(m,k+j+1)\exp(-d(m-1,k+j+1))\exp(-\gamma x^\beta)\\
&\le \exp(-\gamma x^\beta)
\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
&2\sum_{j=0}^{\infty} x_j\sigma_1(hd(m,k+j+1)^{-1})\\
\le&2^{1+1/\beta}x\sum_{j=0}^{\infty}\sigma_1(hd(m,k+j+1)^{-1})\\
&+2\Big(\frac{2}{\gamma}\Big)^{1/\beta}\sum_{j=0}^{\infty} d(m-1,k+j+1)^{1/\beta}\sigma_1(hd(m,k+j+1)^{-1})\\
\le&2^{1+1/\beta}x\sum_{j=0}^{\infty}(d(m-3,k+j+1)-d(m-3,k+j+1-\tau))^{-1}\\
&\cdot\int_{d(m-2,k+j+1-\tau)}^{d(m-2,k+j+1)}\frac{\sigma_1(h\alpha^{-\alpha^y})}{y}dy/\log\alpha\\
&+2\big(2/\gamma\big)^{1/\beta}\sum_{j=0}^{\infty}\Big(1-\Big(\frac{d(m-1,k+j+1-\tau)}{d(m-1,k+j+1)}\Big)^{1/\beta}\Big)^{-1}\\
&\cdot\int_{d(m-2,k+j+1-\tau)}^{d(m-2,k+j+1)}\sigma_1(h\alpha^{-\alpha^y})d\alpha^{\frac{1}{\beta}y}\\
\le&2^{2+\frac{1}{\beta}}d(m-3,k)^{-1}x\int_{d(m-2,k+1-\tau)}^{\infty}\frac{\sigma_1(h\alpha^{-\alpha^y})}{y}dy\\
&+2\big(2/\gamma\big)^{\frac{1}{\beta}}\Big(1-\Big(\frac{d(m-1,k+1-\tau)}{d(m-1,k+1)}\Big)^{1/\beta}\Big)^{-1}\\
&\cdot\int_{d(m-1,k+1-\tau)}^{\infty}\sigma_1(h\alpha^{-y^\beta})dy,
\end{aligned}$$

此外还有

$$2\sum_{j=0}^{\infty}\sigma_2(hd(m,k+j+1)^{-1})$$
$$\leq 4d(m-3,k)^{-1}\int_{d(m-2,k+1-\tau)}^{\infty}\frac{\sigma_2(h\alpha^{-\alpha^y})}{y}dy.$$

综合上述所有不等式得证 (3.3.52).

注 3.3.6 从引理 3.3.2 的证明容易看出，由 (3.3.51) 可推出对任何 $T\geq 0$, $h\geq 0$, $x\geq x^*$, $k>0$ 和整数 $m\geq 3$ 有

$$P\Big\{\sup_{0\leq s\leq h}\|\Gamma(T+s)-\Gamma(T)\|\geq x(\sigma_1(h+d(m,k)^{-1}h)+\sigma_1(h,m,k))$$
$$+\sigma_1^*(h,m,k)+\sigma_2(h+d(m+k)^{-1}h)+\sigma_2(h,m,k)\Big\}$$
$$\leq 4Kd(m,k)\exp(-\gamma x^{\beta}).$$

利用这一引理，我们可证明下列定理，它是由林正炎 (1997a) 给出的. 令

$$L_m x=\underbrace{\log_\alpha\cdots\log_\alpha}_{m\text{ 次}}x.$$

定理 3.3.6 设 $Y(\cdot)$ 是本节开始所定义的过程. 设 a_T 是 T 的正连续拟增函数， $a_T\to\infty$ $(T\to\infty)$. 假设

$$\tilde{\sigma}(p,T)\to\tilde{\sigma}<\infty,\quad \sigma(p,T)=o\Big(\Big(\log\frac{T}{a_T}\Big)^{1/2}\Big),\quad T\to\infty, \tag{3.3.53}$$

$$\int_1^{\infty}\tilde{\sigma}(p,\alpha^{-x^2})dx<\infty,\quad \int_1^{\infty}\sigma(p,\alpha^{-\alpha^x})/xdx<\infty. \tag{3.3.54}$$

又假设存在 $0<\delta<1/\alpha$ 和整数 $m\geq 1$ 使得

$$a_T\leq Td(m,(L_mT)^{\delta+1/\alpha})^{-1}, \tag{3.3.55}$$

且存在 $a_0>0$ 使对任何 $a\geq a_0$, 每一 $i\geq 1$ 有

$$\max_{k\geq 1}E(X_k(ia)-X_k((i-1)a))(X_k(ja)-X_k((j-1)a))\leq 0. \tag{3.3.56}$$

那么我们有

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\sup_{0\le s\le a_T}\frac{\|Y(t+s)-Y(t)\|_{l^p}}{\tilde{\sigma}_p\big(2\log(T/a_T)\big)^{1/2}}=1\quad \text{a.s.},\tag{3.3.57}$$

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T}\frac{\|Y(t+a_T)-Y(t)\|_{l^p}}{\tilde{\sigma}_p\big(2\log(T/a_T)\big)^{1/2}}=1\quad \text{a.s.},\tag{3.3.58}$$

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{\|Y(T+a_T)-Y(T)\|_{l^p}}{\tilde{\sigma}_p\big(2\log(T/a_T)\big)^{1/2}}=1\quad \text{a.s.}\tag{3.3.59}$$

若条件 (3.3.56) 和 (3.3.55) 被下述条件代替:

$$\limsup_{a\to\infty} m(a)\le 0,\tag{3.3.56$'$}$$

其中 $m(a)=\max_{k\ge 1}\max_{j>i\ge 1}E(X_k(ia)-X_k((i-1)a))(X_k(ja)$ $-X_k((j-1)a))$, 且对某 $0<\delta<1/\alpha$,

$$a_T\le T(T^{-\delta_T}\wedge d(m,(L_mT)^{\delta+1/\alpha})^{-1}),\tag{3.3.55$'$}$$

其中 $\delta_T\to 0$ $(T\to\infty)$ 且 $(0\vee m(T))/\delta_T\to 0$ $(T\to\infty)$, 那么 (3.3.57)—(3.3.59) 仍成立.

注 3.3.7　易知

$$d(m,(L_mT)^{\delta+1/\alpha})=T^{(L_1T)^{-1+(L_2T)^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{-1+(L_mT)^{-1+\delta+1/\alpha}}}}}}}.\tag{3.3.60}$$

记 $d(m,(L_mT)^{\delta+1/\alpha})=T^{(L_1T)^{-1+o(T,m)}}$. 则 $o(T,m)\to 0$ 且 $\frac{o(T,m+1)}{o(T,m)}\to 0$ $(T\to\infty)$. 因此当 $T\to\infty$ 时对任给 $\varepsilon>0$ 有

$$d(m,(L_mT)^{\delta+1/\alpha})=\alpha^{(L_1T)^{o(T,m)}}\le\alpha^{(L_1T)^{\varepsilon}},\tag{3.3.61}$$

$$d(m+1,(L_{m+1}T)^{\delta+1/\alpha})/d(m,(L_mT)^{\delta+1/\alpha})\to 0.$$

定理 3.3.6 的证明　我们指出由条件 (3.3.55) 可推出

$$\frac{\log(T/a_T)}{\log\log T}\to\infty,\quad T\to\infty.\tag{3.3.62}$$

首先，我们来证

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\sup_{0\le s\le a_T}\frac{\|Y(t+s)-Y(t)\|_{l^p}}{\tilde{\sigma}_p\big(2\log(T/a_T)\big)^{1/2}}\le 1 \quad \text{a.s.} \qquad (3.3.63)$$

由引理 3.1.2 可知引理 3.3.2 中的 (3.3.51) 对 $K=2, \gamma=\frac{1}{2}, \beta=2$, $\sigma_1(h)=\tilde{\sigma}(p,h)$ 和 $\sigma_2(h)=\delta_p\sigma(p,h)$ 成立. 对 (3.3.55) 中给定的 $\delta>0$ 和 (3.3.52) 中的 $0<\tau<1$, 令 δ_1 满足 $1-1/\alpha-\delta<\delta_1<1-1/\alpha$ 且使得 $\tau_1:=\tau-\log(1-\delta_1)<1$. 记 $\varepsilon_T=d(m-1,(L_m a_T)^{1-\delta_1})/L_1 a_T$. 在 (3.3.52) 中取 $k=L_{m+2}a_T^{\varepsilon_T}$ 和 $k_1=L_{m+2}a_T$. 那么 $d(m+2,k)=a_T^{\varepsilon_T}$ 且

$$\begin{aligned} k-\tau &= L_m\Big[(L_2 a_T)\Big(1+\frac{L_1\varepsilon_T}{L_2 a_T}\Big)\Big]-\tau \\ &= L_{m+2}a_T+L_1(1-\delta_1)-\tau \\ &= k_1-\tau_1. \end{aligned}$$

因此利用条件 (3.3.54), 对任给的 $\varepsilon>0$, 假定 T(等价地 k_1) 充分大，我们有

$$\begin{aligned} &\sigma_1(a_T,m+2,k) \\ &= 2^{5/2}d(m-1,k)^{-1}\int_{d(m,k+1-\tau)}^{\infty}\frac{\sigma_1(a_T\alpha^{-\alpha^x})}{x}dx \\ &\le 2^{5/2}d(m-1,k)^{-1}\int_1^{\infty}\frac{\sigma_1(\alpha^{\alpha^{d(m,k_1)}-\alpha^{xd(m,k_1+1-\tau_1)}})}{x}dx \\ &\le \frac{\varepsilon}{2}\tilde{\sigma}_p. \end{aligned}$$

类似地对充分大的 T

$$\begin{aligned} &\sigma_1^*(a_T,m+2,k) \\ &\quad = 4\Big(1-\Big(\frac{d(m+1,k+1-\tau)}{d(m+1,k+1)}\Big)^{1/2}\Big)^{-1} \\ &\qquad \cdot\int_{d(m+1,k+1-\tau)}^{\infty}\sigma_1(a_T\alpha^{-x^2})dx\le\varepsilon, \end{aligned}$$

$$\sigma_2(a_T,m+2,k)=4d(m-1,k)^{-1}\int_{d(m,k+1-\tau)}^{\infty}\frac{\sigma_2(a_T\alpha^{-\alpha^x})}{x}dx\le\varepsilon.$$

因为当 (3.3.55) 成立时，对充分大的 T,

$$a_T^{\varepsilon+\varepsilon_T} \leq T^{\varepsilon+\varepsilon_T} d(m,(L_m T)^{\delta+1/\alpha})^{-\varepsilon} \leq T^{\varepsilon}.$$

所以，由 (3.3.62), 条件 (3.3.53) 和引理 3.3.2, 即得对任给的 $c>0$ 和充分大的 T 有

$$\begin{aligned}
&P\Big\{\sup_{0\leq t\leq T}\sup_{0\leq s\leq ca_T}\frac{\|Y(t+s)-Y(t)\|_{l^p}}{\tilde{\sigma}_p(2\log(T/ca_T))^{1/2}}\geq 1+2\varepsilon\Big\}\\
\leq &P\Big\{\sup_{0\leq t\leq T}\sup_{0\leq s\leq ca_T}\|Y(t+s)-Y(t)\|_{l^p}\geq(1+\varepsilon)\\
&\cdot\Big(2\Big[\log\frac{T}{ca_T}+\log\log T\Big]\Big)^{1/2}(\sigma_1(ca_T(1+d(m+2,k)^{-1}))\\
&+\sigma_1(ca_T,m+2,k))+\sigma_1^*(ca_T,m+2,k)\\
&+\sigma_2(ca_T(1+d(m+2,k)^{-1}))+\sigma_2(ca_T,m+2,k)\Big\}\\
\leq &\frac{9T}{ca_T}d(m+2,k)^2\exp\Big\{-(1+\varepsilon)^2\Big(\log\frac{T}{ca_T}+\log\log T\Big)\Big\}\\
\leq &9c^{2\varepsilon}T^{-2\varepsilon}a_T^{2(\varepsilon+\varepsilon_T)}(\log T)^{-(1+2\varepsilon)}\\
\leq &9c^{2\varepsilon}(\log T)^{-(1+2\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

对某 $\theta>1$, 记 $T_j=\theta^j$. 那么由 Borel-Cantelli 引理我们有

$$\limsup_{j\to\infty}\sup_{0\leq t\leq T_j}\sup_{0\leq s\leq ca_{T_j}}\frac{\|Y(t+s)-Y(t)\|_{l^p}}{\tilde{\sigma}_p(2\log(T_j/ca_{T_j}))^{1/2}}\leq 1+2\varepsilon\quad\text{a.s.}\tag{3.3.64}$$

注意到 a_T 是拟增的，由 (3.3.64) 我们得 (3.3.63). 由 (3.3.62) 和命题 3.3.2 知，相反的等式也成立. 因而得证 (3.3.57) 成立.

为证 (3.3.58), 只需证明

$$\liminf_{T\to\infty}\sup_{0\leq t\leq T}\frac{\|Y(t+a_T)-Y(t)\|_{l^p}}{\tilde{\sigma}_p(2\log(T/a_T))^{1/2}}\geq 1\quad\text{a.s.}\tag{3.3.65}$$

假设条件 (3.3.55) 和 (3.3.56) 被满足. 对某 $h>0$, 记 $B_{nk}=\{T;kh\leq a_T<(k+1)h,n-1\leq T<n\}$, $a_n'=\inf\{a_T;n-1\leq T<n\}$,

$a_n^* = \sup\{a_T; n-1 \le T < n\}$. 则

$$\begin{aligned}
&\liminf_{T\to\infty} \sup_{0\le t\le T} \frac{\|Y(t+a_T)-Y(t)\|_{l^p}}{\tilde\sigma_p(2\log(T/a_T))^{1/2}} \\
&\ge \liminf_{n\to\infty} \min_{a_n'/h-1\le k\le a_n^*/h} \inf_{T\in B_{nk}} \sup_{0\le t\le T} \frac{\|Y(t+a_T)-Y(t)\|_{l^p}}{\tilde\sigma_p(2\log(T/a_T))^{1/2}} \\
&\ge \liminf_{n\to\infty} \min_{a_n'/h-1\le k\le a_n^*/h} \sup_{0\le t\le n-1} \frac{\|Y(t+kh)-Y(t)\|_{l^p}}{\tilde\sigma_p(2\log(n/kh))^{1/2}} \\
&\quad - \limsup_{n\to\infty} \sup_{0\le t\le n} \sup_{0\le s\le h} \frac{\|Y(t+s)-Y(t)\|_{l^p}}{\tilde\sigma_p(2\log((n-1)/a_n^*))^{1/2}} \\
&=: L_1 - L_2.
\end{aligned}$$

注意到当 $h\to 0$ 时, $\tilde\sigma(p,h)/\tilde\sigma_p \to 0$ 且由 a_T 是拟增的, $a_n^* \le c a_n$. 那么类似于 (3.3.63) 的证明, 当 h 充分小时我们有

$$L_2 \le \varepsilon \quad \text{a.s.} \tag{3.3.66}$$

考察 L_1. 假设 $1\le p<2$. 我们有 (参见 (3.1.17))

$$\begin{aligned}
&\|Y((j+1)kh)-Y(jkh)\|_{l^p} \\
&\quad \ge \frac{\sum_{v=1}^\infty \sigma_v(kh)^{\frac{2(p-1)}{2-p}}(X_v((j+1)kh)-X_v(jkh))}{\left(\sum_{v=1}^\infty \sigma_v(kh)^{\frac{2p}{2-p}}\right)^{\frac{p-1}{p}}}.
\end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned}
\xi(j,k) &= \frac{\sum_{v=1}^\infty \sigma_v(kh)^{\frac{2(p-1)}{2-p}}(X_v((j+1)kh)-X_v(jkh))}{\tilde\sigma(p,kh)\left(\sum_{v=1}^\infty \sigma_v(kh)^{\frac{2p}{2-p}}\right)^{\frac{p-1}{p}}} \\
&= \frac{\sum_{v=1}^\infty \sigma_v(kh)^{\frac{2(p-1)}{2-p}}(X_v((j+1)kh)-X_v(jkh))}{\left(\sum_{v=1}^\infty \sigma_v(kh)^{\frac{2p}{2-p}}\right)^{1/2}}.
\end{aligned}$$

那么由条件 (3.3.56), 对 $j>i\ge 1$, 当 k 充分大时有

$$\begin{aligned}
&E\xi(i,k)\xi(j,k) \\
&=\left(\sum_{v=1}^\infty \sigma_v(kh)^{\frac{2p}{2-p}}\right)^{-1}\left(\sum_{v=1}^\infty \sigma_v(kh)^{\frac{4(p-1)}{2-p}}\right)E(X_v((i+1)kh)-X_v(ikh)) \\
&\quad \cdot (X_v((j+1)kh)-X_v(jkh)) \le 0,
\end{aligned} \tag{3.3.67}$$

故由 Slepian 不等式，回顾 B_{nk} 的定义并注意到条件 (3.3.55) 及 a_T 的拟增性，存在 $C>0$ 使得对充分大的 n 有

$$\begin{aligned}
&P\Big\{\min_{a_n'/h-1\le k\le a_n^*/h}\max_{0\le j\le n/2kh}\xi(j,k)\le(1-\varepsilon)\Big(2\log\frac{n}{kh}\Big)^{1/2}\Big\}\\
&\le\sum_{k=[a_n'/h]-1}^{[a_n^*/h]}P\Big\{\max_{0\le j\le n/2kh}\xi(j,k)\le(1-\varepsilon)\Big(2\log\frac{n}{kh}\Big)^{1/2}\Big\}\\
&\le\sum_{k=[a_n'/h]-1}^{[a_n^*/h]}\Big(1-\exp\Big\{-(1-\varepsilon)\log\frac{n}{kh}\Big\}\Big)^{n/2kh}\\
&\le Ca_n\exp\{-C(n/a_n)^{\varepsilon}\}\le Cn^{-2}.
\end{aligned}\tag{3.3.68}$$

由此即得

$$L_1\ge1-\varepsilon\quad\text{a.s.}\tag{3.3.69}$$

假设 $p\ge2$. 取 N_k 使得 $\sigma_{N_k}(kh)=\sigma^*(kh)$. 显然对充分大的 k 有

$$\frac{\|Y((j+1)kh)-Y(jkh)\|_{l^p}}{\tilde\sigma_p}\ge(1-\varepsilon)\frac{X_{N_k}((j+1)kh)-X_{N_k}(jkh)}{\sigma_{N_k}(kh)}.$$

按 $1\le p<2$ 情形时的证法，我们也有 (3.3.69). 至此 (3.3.65) 已被证明了，因此在条件 (3.3.55) 和 (3.3.56) 下，我们完成了 (3.3.57) 和 (3.3.58) 的证明.

现在考察 (3.3.59). 这只需证明

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{\|Y(T+a_T)-Y(T)\|_{l^p}}{\tilde\sigma_p(2\log(T/a_T))^{1/2}}\ge1\quad\text{a.s.}\tag{3.3.70}$$

令 $a_T'=a_0[a_T/a_0]$, 其中 a_0 由条件 (3.3.56) 确定. 那么

$$\begin{aligned}
\limsup_{T\to\infty}\frac{\|Y(T+a_T)-Y(T)\|_{l^p}}{\tilde\sigma_p(2\log(T/a_T))^{1/2}}&\ge\limsup_{T\to\infty}\frac{\|Y(T+a_T')-Y(T)\|_{l^p}}{\tilde\sigma_p(2\log(T/a_T'))^{1/2}}\\
&\quad-\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\le s\le a_0}\frac{\|Y(T+s)-Y(T)\|_{l^p}}{\tilde\sigma_p(2\log(T/a_T))^{1/2}}=:I_1-I_2.
\end{aligned}\tag{3.3.71}$$

注意到注 3.3.5, 按 (3.3.63) 的证明方法，我们有

$$I_2 = 0 \quad \text{a.s.} \tag{3.3.72}$$

设 $t_0 = 1$. 由 $t_k = t_{k-1} + a'_{t_{k-1}}$, $k = 1, 2, \ldots$, 定义 t_k. 则

$$\begin{aligned}
&\frac{\|Y(t_k + a'_{t_k}) - Y(t_k)\|_{l^p}}{\tilde{\sigma}(p, a'_{t_k})} \\
&\quad \geq \frac{\sum_{v=1}^{\infty} \sigma_v(a'_{t_k})^{\frac{2(p-1)}{2-p}} (X_v(t_k + a'_{t_k}) - X_v(t_k))}{\left(\sum_{v=1}^{\infty} \sigma_v(a'_{t_k})^{\frac{2p}{2-p}}\right)^{1/2}} =: \zeta_k.
\end{aligned}$$

再次运用条件 (3.3.56), 只要 i 充分大，对 $j > i$ 我们有

$$E\zeta_i\zeta_j \leq 0.$$

令 $D_n = \{k; \frac{1}{2}n \leq t_k \leq n-1\}$. 显然，由条件 (3.3.55), 对 $k \in D_n$, 当 $n \to \infty$ 时 $a_{t_k} = o(n)$. 因此对充分大的 n 有

$$\sum_{k \in D_n} a_{t_k} \geq \sum_{k \in D_n} (t_k - t_{k-1}) - \max_{k \in D_n} a_{t_k} \geq \frac{1}{3} n.$$

其次，由条件 (3.3.55) 可知，对任何 $A > 0$ 和充分大的 T 有

$$a_T \leq T(\log T)^{-A}. \tag{3.3.73}$$

由 Slepian 不等式，对 n, $n-1 < T \leq n$, 当 $n \to \infty$ 时

$$\begin{aligned}
&P\left\{\sup_{T/2 \leq t \leq T} \frac{\|Y(t + a'_t) - Y(t)\|_{l^p}}{\tilde{\sigma}_p (2\log(t/a_t))^{1/2}} \leq 1 - \varepsilon\right\} \\
&\quad \leq P\left\{\max_{k \in D_n} \zeta_k / (2\log(t_k/a_{t_k}))^{1/2} \leq 1 - \frac{\varepsilon}{2}\right\} \\
&\quad \leq \prod_{k \in D_n} P\left\{\zeta_k \leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)(2\log(t_k/a_{t_k}))^{1/2}\right\} \\
&\quad \leq \prod_{k \in D_n} \left(1 - \exp\left\{-\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\log(t_k/a_{t_k})\right\}\right) \\
&\quad \leq \exp\left\{-\sum_{k \in D_n} (a_{t_k}/t_k)^{1-\varepsilon/2}\right\} \leq \exp\{-\frac{1}{3}\log n\} \to 0.
\end{aligned}$$

由此即得

$$I_1 \geq 1-\varepsilon \quad \text{a.s.} \tag{3.3.74}$$

把 (3.3.72) 和 (3.3.74) 代入 (3.3.71) 中就得 (3.3.70), 因此 (3.3.59) 得证.

当条件 (3.3.55) 和 (3.3.56) 分别被 (3.3.55′) 和 (3.3.56′) 代替时, (3.3.69) 的证明是类似的. 我们仅考察 $1 \leq p < 2$ 的情形. 注意到已证的事实, 不失一般性我们假设 $m(a) \geq 0$ 对所有充分大的 a 成立. 令

$$m_1(a) = m(a)\Big(\sum_{v=1}^{\infty} \sigma_v(a)^{\frac{2p}{2-p}}\Big)^{-1} \sum_{v=1}^{\infty} \sigma_v(a)^{\frac{4(p-1)}{2-p}}.$$

设 $\eta_j = \eta_j^{(k)}, j = 0, 1, \ldots, [n/2kh]$, 和 $\tau = \tau^{(k)}$ 是独立正态随机变量, 均值为零, 且 $E\eta_j^2 = 1 - m_1(kh)$, $E\tau^2 = m_1(kh)$. 定义 $\xi_i = \eta_i + \tau$. 则 $E\xi_i^2 = 1$ 且

$$E\xi(i,k)\xi(j,k) = E\xi_i\xi_j = m_1(kh), \quad j - i \geq 1.$$

从而对充分大的 n 有

$$\begin{aligned}
&P\Big\{\min_{a_n'/h-1 \leq k \leq a_n^*/h} \max_{0 \leq j \leq n/2kh} \xi(j,k) \leq (1-\varepsilon)\Big(2\log\frac{n}{kh}\Big)^{1/2}\Big\} \\
&\leq \sum_{k=[a_n'/h]-1}^{[a_n^*/h]} P\Big\{\max_{0 \leq j \leq n/2kh} \xi_j \leq (1-\varepsilon)\Big(2\log\frac{n}{kh}\Big)^{1/2}\Big\} \\
&\leq \sum_{k=[a_n'/h]-1}^{[a_n^*/h]} \Big(P\Big\{\max_{0 \leq j \leq n/2kh} \eta_j \leq \Big(1-\frac{\varepsilon}{2}\Big)\Big(2\log\frac{n}{kh}\Big)^{1/2}\Big\} \\
&\qquad + P\Big\{\tau \geq \frac{\varepsilon}{2}\Big(2\log\frac{n}{kh}\Big)^{1/2}\Big\}\Big) \\
&\leq \sum_{k=[a_n'/h]-1}^{[a_n^*/h]} \Big(\Big(1-\exp\Big\{-\Big(1-\frac{\varepsilon}{2}\Big)\log\frac{n}{kh}\Big\}\Big)^{\frac{n}{2kh}} \\
&\qquad + \exp\Big\{-\frac{\varepsilon^2}{4m_1(kh)}\log\frac{n}{kh}\Big\}\Big)
\end{aligned}$$

$$\le \sum_{k=[a'_n/h]-1}^{[a_n^*/h]} \Big(\exp\Big\{-\Big(\frac{n}{2kh}\Big)^{\varepsilon/2}\Big\} + \Big(\frac{n}{kh}\Big)^{-\varepsilon^2/4m_1(kh)}\Big)$$

$$\le h^{-1} n \exp(-(\log n)^2) + \sum_{k=[a'_n/h]-1}^{[a_n^*/h]} n^{-\varepsilon^2\delta_{kh}/4m_1(kh)}.$$

注意到 $m(T)/\delta_T \to 0$ $(T \to \infty)$, 这就得 (3.3.69). (3.3.58) 证毕. 类似地在条件 (3.3.55′) 和 (3.3.56′) 下我们可证明 (3.3.59). 细节从略.

利用定理 3.3.6 的结论我们可给出下列推论.

推论 3.3.5 设 $\{Y(t); t \ge 0\} = \{X_k(t); t \ge 0\}_{k=1}^{\infty}$ 为独立的 γ 阶分数 O-U 过程, 具有系数 γ_k 和 λ_k, 其中 $0 < \gamma < 1$, $\gamma_k \ge 0$, $\lambda_k > 0$. 假设条件 (3.3.53) 和 (3.3.54) 被满足. 设 a_T 如定理 3.3.5 中定义, 且满足条件 (3.3.55). 那么 (3.3.57)—(3.3.59) 成立.

§3.4 l^∞ 值 Gauss 过程的增量

设 $\{Y(t); t \ge 0\} = \{X_k(t); t \ge 0\}_{k=1}^{\infty}$ 为 Gauss 过程, $EX_k(t) = 0$ 且 $\sigma_k^2(h) = E(X_k(t+h) - X_k(t))^2$ 是非降连续的. 我们将保留上面引进的记号.

3.4.1 连续模

不失一般性, 我们假设, 对每一 $k \ge 1$, 当 $h > 0$ 时 $\sigma_k(h) > 0$. 设 y_h 是下述方程的解

$$\sum_{k=1}^{\infty} (hy_h)^{\sigma^{*2}(h)/\sigma_k^2(h)} = h. \tag{3.4.1}$$

下述结果是由 Csörgő, Lin 和 Shao (1994a) 得到的.

定理 3.4.1 假设对某 $\alpha > 0$, $\sigma^{*2}(h)/h^\alpha$ 是拟增的, 且存在正数 A 和 h_0 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^A(h_0) < \infty. \tag{3.4.2}$$

那么

$$\limsup_{h\downarrow 0}\sup_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\max_{k\ge 1}\frac{|X_k(t+s)-X_k(t)|}{\sigma^*(h)(2\log(1/(hy_h)))^{1/2}}\le 1\quad \text{a.s.} \tag{3.4.3}$$

若 (3.4.2) 代之以条件：对某 $0<h\le h_0$ 使对某个 $c_1>0$ 和每一 $k\ge 1$

$$\inf_{0<s\le h}\frac{\sigma^*(s)}{\sigma_k(s)}\ge c_1\frac{\sigma^*(h)}{\sigma_k(h)} \tag{3.4.4}$$

且

$$\sum_{k=1}^{\infty}\exp\Big\{-\frac{\sigma^{*2}(h)}{\sigma_k^2(h)}\log\frac{1}{h}\Big\}<\infty, \tag{3.4.5}$$

那么 (3.4.3) 对 $y_h=1$ 成立. 若进一步假设 $X_k(\cdot)$, $k=1,2,\dots$, 是独立的，且对 $0\le t_1<t_2\le t_3<t_4$

$$E(X_k(t_2)-X_k(t_1))(X_k(t_4)-X_k(t_3))\le 0, \tag{3.4.6}$$

那么

$$\limsup_{h\downarrow 0}\sup_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\max_{k\ge 1}\frac{|X_k(t+s)-X_k(t)|}{\sigma^*(h)(2\log(1/(hy_h)))^{1/2}}=1\quad \text{a.s.} \tag{3.4.7}$$

且

$$\limsup_{h\downarrow 0}\sup_{0\le t\le 1}\max_{k\ge 1}\frac{|X_k(t+h)-X_k(t)|}{\sigma^*(h)(2\log(1/(hy_h)))^{1/2}}=1\quad \text{a.s.} \tag{3.4.8}$$

证明 首先，我们列出下列事实. 因为

$$h=\sum_{k=1}^{\infty}(hy_h)^{\sigma^{*2}(h)/\sigma_k^2(h)}\ge hy_h,$$

所以我们有 $0<y_h\le 1$. 此外通过一些初等计算容易看到，由条件 (3.4.2) 可推出 (3.4.5)，后者保证了方程 (3.4.1) 解的存在唯一性. 我们也有下述性质：存在常数 $d>0$ 使得

$$\sigma^{*2}(h)\ge dh^2. \tag{3.4.9}$$

事实上，注意到 $\sigma_k^2(h)$ 的定义，我们有 $\sigma_k^2(2h)\le 4\sigma_k^2(h)$. 所以，归纳地有

$$\sigma_k^2(h)\ge \frac{1}{4}\sigma_k^2(2h)\ge\cdots\ge\frac{1}{4^l}\sigma_k^2(2^l h)\ge h^2\sigma_k^2\Big(\frac{1}{2}\Big),\quad 当\frac{1}{2}\le 2^l h\le 1. \tag{3.4.10}$$

这就推得 (3.4.9). 进一步，结合条件 (3.4.2), 我们得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{\sigma_k(h)}{\sigma^*(h)}\Big)^A\le\frac{c_2}{h^A},\quad 当0<h\le h_0, \tag{3.4.11}$$

其中 $c_2=d^{-A/2}\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^A(h_0)$.

第一步，我们来证对给定的 $\varepsilon>0$ 存在常数 $C=C(\varepsilon)>0$ 使得

$$P\Big\{\sup_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\max_{k\ge 1}\frac{|X_k(t+s)-X_k(t)|}{\sigma^*(h)(2\log(1/(hy_h)))^{1/2}}\ge 1+\varepsilon\Big\}\le Ch^{\varepsilon}y_h^{\varepsilon}. \tag{3.4.12}$$

易知，对 $0<s\le h$, 由 (3.4.1) 有

$$\begin{aligned}&P\Big\{\max_{k\ge 1}\frac{|X_k(t+s)-X_k(t)|}{\sigma^*(h)(2\log(1/(hy_h)))^{1/2}}\ge 1+\varepsilon\Big\}\\&\le\sum_{k=1}^{\infty}\exp\Big\{-(1+\varepsilon)^2\Big(\log\frac{1}{hy_h}\Big)\frac{\sigma^{*2}(h)}{\sigma_k^2(h)}\Big\}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}(hy_h)^{(1+\varepsilon)^2\sigma^{*2}(h)/\sigma_k^2(h)}\le h^{1+2\varepsilon}y_h^{2\varepsilon}.\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

对任一正数 t 和正整数 $r=r(\varepsilon)$, 令 $r_1=h/2^r$ 和 $t_r=[t/r_1]r_1$. 我们有

$$\begin{aligned}|X_k(t+s)-X_k(t)|\le{}&|X_k((t+s)_r)-X_k(t_r)|\\&+\sum_{j=0}^{\infty}|X_k((t+s)_{r+j+1})-X_k((t+s)_{r+j})|\\&+\sum_{j=0}^{\infty}|X_k(t_{r+j+1})-X_k(t_{r+j})|.\end{aligned}$$

那么由 (3.4.13) 有

$$P\Big\{\sup_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h-r_1}\max_{k\ge 1}\frac{|X_k((t+s)_r)-X_k(t_r)|}{\sigma^*(h)(2\log(1/(hy_h)))^{1/2}}\ge 1+\frac{\varepsilon}{2}\Big\}$$
$$\le \frac{4}{h}2^{2r}h^{1+\varepsilon}y_h^{\varepsilon}\le Ch^{\varepsilon}y_h^{\varepsilon}. \tag{3.4.14}$$

因 $\sigma^{*2}(h)/h^{\alpha}$ 是拟增的，存在 $c_0>0$ 使得

$$\frac{\sigma^{*2}(h)}{\sigma_k^2(2h/2^r)}\ge c_0 2^{\alpha(r-1)}\frac{\sigma^{*2}(2h/2^r)}{\sigma_k^2(2h/2^r)}\ge c_0 2^{\alpha(r-1)}.$$

若条件 (3.4.2) 被满足，则由 (3.4.11), 对充分大的 r 和充分小的 h, 类似于 (3.4.13), 我们得

$$p_1:=P\Big\{\sup_{0\le t\le 1}\sup_{h-r_1\le s\le h}\max_{k\ge 1}\frac{|X_k((t+s)_r)-X_k((t+h-r_1)_r)|}{\sigma^*(h)(2\log(1/(hy_h)))^{1/2}}\ge\frac{\varepsilon}{4}\Big\}$$
$$\le\frac{2}{h}2^r\sum_{k=1}^{\infty}(hy_h)^{\varepsilon^2\sigma^{*2}(h)/(16\sigma_k^2(2h/2^r))}$$
$$\le 2^{r+1}h^{1+A}y_h\sum_{k=1}^{\infty}\exp\Big\{-\Big(\frac{\varepsilon^2}{16}\frac{\sigma^{*2}(h)}{\sigma_k^2(2h/2^r)}-2-A\Big)\log\frac{1}{hy_h}\Big\}$$
$$\le 2^{r+1}h^{1+A}y_h\sum_{k=1}^{\infty}\exp\Big\{-\Big(\frac{\sigma^{*2}(h)}{\sigma_k^2(2h/2^r)}-1\Big)\frac{A}{2}\Big\}$$
$$\le 2^{r+1}h^{1+A}y_h\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{\sigma_k(2h/2^r)}{\sigma^*(h)}\Big)^A$$
$$\le c_2 2^{r+1}h^{1+A}y_h\Big(\frac{\sigma^*(2h/2^r)}{\sigma^*(h)}\Big)^A\Big(\frac{2h}{2^r}\Big)^{-A}$$
$$\le Chy_h. \tag{3.4.15}$$

若条件 (3.4.4) 和 (3.4.5) 被满足，那么注意到 $\sigma^{*2}(h)/h^{\alpha}$ 是拟增的，取 r 充分大和 h 充分小，我们得

$$p_1\le\frac{2}{h}2^r\sum_{k=1}^{\infty}(hy_h)^{\sigma^{*2}(h)/\sigma_k^2(h)\cdot\varepsilon^2/16\cdot\sigma_k^2(h)/\sigma_k^2(2h/2^r)}$$
$$\le\frac{2}{h}2^r\sum_{k=1}^{\infty}(hy_h)^{\sigma^{*2}(h)/\sigma_k^2(h)\cdot\varepsilon^2/16\cdot c_1\sigma^{*2}(h)/\sigma^{*2}(2h/2^r)}$$

$$\le \frac{2}{h} 2^r \sum_{k=1}^{\infty} (hy_h)^{2\sigma^{*2}(h)/\sigma_k^2(h)}$$
$$\le Chy_h. \tag{3.4.16}$$

进一步，令 $x_j^2 = 2B\log\frac{1}{hy_h} + 2(1+A)j$, 其中 $B = 2/c_1$. 若条件 (3.4.2) 被满足，那么类似于 (3.4.15), 我们有

$$p_2 := P\left\{\sup_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\max_{k\ge 1}\sum_{j=0}^{\infty}|X_k((t+s)_{r+j+1}) - X_k((t+s)_{r+j})| \ge \sum_{j=0}^{\infty} x_j\sigma^*(h/2^{r+j+1})\right\}$$
$$\le \frac{2}{h}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} 2^{r+j+1}\exp\left\{-\frac{x_j^2}{2}\frac{\sigma^{*2}(h/2^{r+j+1})}{\sigma_k^2(h/2^{r+j+1})}\right\}$$
$$\le 2\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} 2^{r+j+1}e^{-(1+A)j}h^{1+A}y_h \cdot \exp\left\{-\left(\frac{B\sigma^{*2}(h/2^{r+j+1})}{\sigma_k^2(h/2^{r+j+1})} - 2 - A\right)\log\frac{1}{hy_h}\right\}$$
$$\le 4\cdot 2^r h^{1+A}y_h \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} 2^j e^{-(1+A)j}\left(\frac{\sigma_k(h/2^{r+j+1})}{\sigma^*(h/2^{r+j+1})}\right)^A$$
$$\le 4c_2 2^{r(1+A)+A} hy_h \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(1+A)j}e^{-(1+A)j} \le Chy_h. \tag{3.4.17}$$

又若条件 (3.4.4) 和 (3.4.5) 被满足，那么类似于 (3.4.16) 和 (3.4.17), 我们有

$$p_2 \le \frac{2}{h}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} 2^{2(r+j+1)}e^{-(1+A)j}\exp\left\{-B\left(\log\frac{1}{hy_h}\right)c_1\frac{\sigma^{*2}(h)}{\sigma_k^2(h)}\right\}$$
$$\le Chy_h. \tag{3.4.18}$$

类似地，在两种情形我们都有

$$P\left\{\sup_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\max_{k\ge 1}\sum_{k=1}^{\infty}|X_k(t_{r+j+1}) - X_k(t_{r+j})| \ge \sum_{j=0}^{\infty} x_j\sigma^*(h/2^{r+j+1})\right\} \le Chy_h. \tag{3.4.19}$$

其次，由于 $\sigma^{*2}(h/2^{r+j+1})/\sigma^{*2}(h)\le c_0^{-1}2^{-\alpha(r+j+1)}$，对充分大的 r 我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{\infty}x_j\sigma^*\Big(\frac{h}{2^{r+j+1}}\Big)\\
&\quad=\sigma^*(h)\Big\{(2Bc_0^{-1})^{1/2}\Big(\log\frac{1}{hy_h}\Big)^{1/2}\sum_{j=0}^{\infty}2^{-\alpha(r+j+1)/2}\\
&\qquad+c_0^{-1/2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(2(1+A)j)^{1/2}}{2^{\alpha(r+j+1)/2}}\Big\}\\
&\quad\le\frac{\varepsilon}{8}\sigma^*(h)\Big(\log\frac{1}{hy_h}\Big)^{1/2},
\end{aligned}\tag{3.4.20}$$

综合这些估计，我们得 (3.4.12).

为证 (3.4.3), 我们再次利用 (3.4.9), 由 (3.4.12) 得：当 h 充分小时，

$$\begin{aligned}
&P\Big\{\sup_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\max_{k\ge 1}\frac{|X_k(t+s)-X_k(t)|}{\sigma^*(h)(2\log(1/(hy_h)))^{1/2}}\ge 1+\varepsilon\Big\}\\
&\quad\le C(hy_h)^{\varepsilon/2}\big(\log\sigma^{*^{-1}}(h)\big)^{-2}.
\end{aligned}\tag{3.4.21}$$

设 $\theta>1$. 定义 $A_i=\{h;\theta^{-i-1}\le\sigma^*(h)<\theta^{-i}\}$, $A_{ij}=\{h;\theta^{-j-1}\le hy_h<\theta^{-j},\ h\in A_i\}$, 和 $h_{ij}=\sup\{h;h\in A_{ij}\}$. 则

$$\begin{aligned}
&\limsup_{h\downarrow 0}\sup_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\max_{k\ge 1}\frac{|X_k(t+s)-X_k(t)|}{\sigma^*(h)(2\log(1/(hy_h)))^{1/2}}\\
&\quad\le\limsup_{i\to\infty}\sup_{j\ge 0}\sup_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h_{ij}}\max_{k\ge 1}\frac{|X_k(t+s)-X_k(t)|}{\theta^{-i-1}(2\log\theta^j)^{1/2}}\\
&\quad\le\limsup_{i\to\infty}\sup_{j\ge 0}\sup_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h_{ij}}\max_{k\ge 1}\frac{\theta^2|X_k(t+s)-X_k(t)|}{\sigma^*(h_{ij})(2\log(1/(h_{ij}y_{h_{ij}})))^{1/2}}.
\end{aligned}$$

利用 (3.4.21), 我们有

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\Big\{\sup_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h_{ij}}\max_{k\ge 1}\frac{|X_k(t+s)-X_k(t)|}{\sigma^*(h_{ij})(2\log(1/(h_{ij}y_{h_{ij}})))^{1/2}}\ge 1+\varepsilon\Big\}$$

$$\leq C\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(h_{ij}y_{h_{ij}})^{\varepsilon/2}\big(\log\sigma^{*^{-1}}(h_{ij})\big)^{-2}$$

$$\leq C\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\theta^{-j\varepsilon/2}(i\log\theta)^{-2}<\infty.$$

因此, 若能证明在条件 (3.4.4) 和 (3.4.5) 下有 $y_h=1$, 那么由 Borel-Cantelli 引理 (3.4.3) 得证. 为了证明我们可以取 $y_h=1$ 这一事实, 只需证明 $\log\frac{1}{y_h}=o(\log\frac{1}{h})$. 考察方程

$$\sum_{k=1}^{\infty}x^{c_1(\log 2)\sigma^{*^2}(1/2)/\sigma_k^2(1/2)}=1.$$

由条件 (3.4.5) 知, 它的解 $x=x_0>0$ 存在. 于是对任何 $0<h\leq 1/2$ 有

$$1=\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{\infty}(hy_h)^{\sigma^{*^2}(h)/\sigma_k^2(h)}\leq\sum_{k=1}^{\infty}y^{c_1\sigma^{*^2}(1/2)/\sigma_k^2(1/2)}.$$

从而, 对 $0<h<1/2$ 有 $y_h\geq x_0^{\log 2}$, 待证的结论成立.

其次, 在独立性的假设和条件 (3.4.6) 下, 我们来证 (3.4.8). 已有 (3.4.3), 因此只需证明

$$\limsup_{h\downarrow 0}\sup_{0\leq t\leq 1}\max_{k\geq 1}\frac{|X_k(t+h)-X_k(t)|}{\sigma^*(h)(2\log(1/(hy_h)))^{1/2}}\geq 1\quad\text{a.s.}\qquad(3.4.22)$$

为此, 只需证明对任何 $h_n\downarrow 0$, $0<\varepsilon<1$,

$$\lim_{n\to\infty}P\Big\{\sup_{0\leq t\leq 1}\max_{k\geq 1}\frac{|X_k(t+h_n)-X_k(t)|}{\sigma^*(h_n)(2\log(1/(h_ny_{h_n})))^{1/2}}\geq 1-\varepsilon\Big\}=1.\qquad(3.4.23)$$

事实上, 对充分大的 n, 即 h_n 充分小时, 我们有

$$P\Big\{\sup_{0\leq t\leq 1}\max_{k\geq 1}\frac{|X_k(t+h_n)-X_k(t)|}{\sigma^*(h_n)(2\log(1/(h_ny_{h_n})))^{1/2}}<1-\varepsilon\Big\}$$

$$\leq P\Big\{\max_{0\leq j\leq 1/h_n}\max_{k\geq 1}\frac{X_k((j+1)h_n)-X_k(jh_n)}{\sigma^*(h_n)(2\log(1/(h_ny_{h_n})))^{1/2}}<1-\varepsilon\Big\}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \prod_{j=0}^{[1/h_n]} \prod_{k=1}^{\infty} P\left\{ \frac{X_k((j+1)h_n) - X_k(jh_n)}{\sigma^*(h_n)(2\log(1/(h_n y_{h_n})))^{1/2}} < 1-\varepsilon \right\} \\
&\le \prod_{j=0}^{[1/h_n]} \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ 1 - \exp\left\{ -\frac{(1-\varepsilon)\sigma^{*^2}(h_n)}{\sigma_k^2(h_n)} \log \frac{1}{h_n y_{h_n}} \right\}\right\} \\
&= \prod_{j=0}^{[1/h_n]} \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ 1 - (h_n y_{h_n})^{(1-\varepsilon)\sigma^{*^2}(h_n)/\sigma_k^2(h_n)} \right\} \\
&\le \prod_{j=0}^{[1/h_n]} \exp\left\{ -\sum_{k=1}^{\infty} (h_n y_{h_n})^{(1-\varepsilon)\sigma^{*^2}(h_n)/\sigma_k^2(h_n)} \right\} \\
&\le \exp(-h_n^{-\varepsilon}) \to 0, \quad n \to \infty,
\end{aligned}
$$

在第二个不等式中我们利用了独立性和 Slepian 不等式. 因此 (3.4.8) 得证.

最后，我们来证明 (3.4.7). 借助 (3.4.3), 只需证明

$$
\liminf_{h\downarrow 0} \sup_{0\le t\le 1} \sup_{0\le s\le h} \max_{k\ge 1} \frac{|X_k(t+s) - X_k(t)|}{\sigma^*(h)(2\log(1/(hy_h)))^{1/2}} \ge 1 \quad \text{a.s.} \tag{3.4.24}
$$

定义 A_{ij} 如上， $h'_{ij} = \inf\{h; h \in A_{ij}\}$. 则

$$
\begin{aligned}
&\liminf_{h\downarrow 0} \sup_{0\le t\le 1} \sup_{0\le s\le h} \max_{k\ge 1} \frac{|X_k(t+s) - X_k(t)|}{\sigma^*(h)(2\log(1/(hy_h)))^{1/2}} \\
&\ge \liminf_{i\to\infty} \inf_{j\ge 0} \sup_{0\le t\le 1} \sup_{0\le s\le h'_{ij}} \max_{k\ge 1} \frac{|X_k(t+s) - X_k(t)|}{\theta^{-i}(2\log \theta^{j+1})^{1/2}} \\
&\ge \liminf_{i\to\infty} \inf_{j\ge 0} \max_{0\le l\le 1/h'_{ij}} \max_{k\ge 1} \frac{|X_k((l+1)h'_{ij}) - X_k(lh'_{ij})|}{\theta^2\sigma^*(h'_{ij})(2\log(1/(h'_{ij} y_{h'_{ij}})))^{1/2}}.
\end{aligned} \tag{3.4.25}
$$

再次利用 Slepian 不等式，我们有

$$
\begin{aligned}
&P\left\{ \max_{0\le l\le 1/h'_{ij}} \max_{k\ge 1} \frac{|X_k((l+1)h'_{ij}) - X_k(lh'_{ij})|}{\sigma^*(h'_{ij})(2\log(1/(h'_{ij} y_{h'_{ij}})))^{1/2}} \le 1-\varepsilon \right\} \\
&\quad \le \prod_{l=0}^{[1/h'_{ij}]} \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ 1 - \exp\left\{ -\frac{(1-\varepsilon)\sigma^{*^2}(h'_{ij})}{\sigma_k^2(h'_{ij})} \log \frac{1}{h'_{ij} y_{h'_{ij}}} \right\}\right\}
\end{aligned}
$$

$$\leq \exp\left\{-(h'_{ij}y_{h'_{ij}})^{-\varepsilon}\right\} \leq \exp\left\{-(h'_{ij}y_{h'_{ij}})^{-\varepsilon/2}\log \sigma^{*^{-1}}(h'_{ij})\right\}$$
$$\leq \exp\left\{-\theta^{j\varepsilon/2}(i\log\theta)\right\}.$$

倒数第二个不等式是由于 (3.4.9). 所以

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}P\left\{\max_{0\leq l\leq 1/h'_{ij}}\max_{k\geq 1}\frac{|X_k((l+1)h'_{ij})-X_k(lh'_{ij})|}{\sigma^*(h'_{ij})(2\log(1/(h'_{ij}y_{h'_{ij}})))^{1/2}}\leq 1-\varepsilon\right\}<\infty. \tag{3.4.26}$$

由 (3.4.25) 和 (3.4.26) 即得 (3.4.24). 定理 3.4.1 证毕.

推论 3.4.1 假设存在常数 $0<c_1\leq c_2<\infty$, 正数列 $\{a_k;k\geq 1\}$ 和非降函数 $\sigma(h)$ 使得对任给的 $h>0$ 和每一 $k\geq 1$ 有

$$c_1a_k\sigma(h)\leq \sigma_k(h)\leq c_2a_k\sigma(h). \tag{3.4.27}$$

此外, 假设对某 $\alpha>0$, $\sigma^2(h)/h^\alpha$ 是拟增的, 且对某 $A>0$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\exp\{-Aa^{*^2}/a_k^2\}<\infty, \tag{3.4.28}$$

其中 $a^*=\max_{k\geq 1}a_k$. 那么 (3.4.3) 对 $y_h=1$ 成立. 若还假设 $\{X_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ 是独立的且 (3.4.6) 被满足, 那么 (3.4.7) 和 (3.4.8) 对 $y_h=1$ 成立.

证明 显然 (3.4.27) 蕴含着 (3.4.4). 这样由定理 3.4.1 即得所述的结论.

注 3.4.1 当 (3.4.2) 被满足时, 我们来给出 y_h 的上、下界估计. 注意到对任一 $0<h\leq e^{-A/2}$,

$$1\leq y_h\sum_{k=1}^{\infty}h^{\sigma^{*^2}(h)/\sigma_k^2(h)-1}=y_h\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left\{-\left(\log\frac{1}{h}\right)\left(\frac{\sigma^{*^2}(h)}{\sigma_k^2(h)}-1\right)\right\}$$
$$\leq y_h\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{A}{2}\left(\frac{\sigma^{*^2}(h)}{\sigma_k^2(h)}-1\right)\right\}\leq y_h\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sigma_k(h)}{\sigma^*(h)}\right)^A,$$

即我们有

$$y_h \ge \Big(\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{\sigma_k(h)}{\sigma^*(h)}\Big)^A\Big)^{-1}. \tag{3.4.29}$$

其次，注意到对任何 $h>0$ 和 $\theta>1$

$$h=\sum_{k=1}^{\infty}(hy_h)^{\sigma^{*^2}(h)/\sigma_k^2(h)} \ge \sum_{k\in A_\theta(h)}(hy_h)^\theta = Card\{A_\theta(h)\}(hy_h)^\theta,$$

其中 $A_\theta(h)=\{k:\sigma_k^2(h)/\sigma^{*^2}(h)\ge 1/\theta\}$. 因此

$$y_h \le (\mathrm{Card}\{A_\theta(h)\}/h)^{1/\theta}/h. \tag{3.4.30}$$

结合定理 3.4.1 与 (3.4.29) 可得如下结果.

推论 3.4.2 假设对某 $\alpha>0$, $\sigma^{*^2}(h)/h^\alpha$ 是拟增的且 (3.4.1) 被满足. 又假设

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\sigma_k(h)/\sigma^*(h))^A = o\Big(\frac{1}{h}\Big), \quad h\to 0. \tag{3.4.31}$$

那么 (3.4.3) 对 $y_h=1$ 成立. 若还假设 $\{X_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ 是独立的且 (3.4.6) 被满足，那么 (3.4.7) 和 (3.4.8) 对 $y_h=1$ 成立.

作为这个推论的应用，我们有

推论 3.4.3 设 $\{X_k(t);t\ge 0\}_{k=1}^{\infty}$ 是独立 O-U 过程序列，具有系数 γ_k 和 λ_k, $k=1,2,\cdots$. 假设对某 $\alpha>0$, $\sigma^{*^2}(h)/h^\alpha$ 是拟增的且对某 $A\ge 2$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k^A<\infty. \tag{3.4.32}$$

则 (3.4.7) 和 (3.4.8) 对 $y_h=1$ 成立.

证明 对 $\{X_k(\cdot)\}$, (3.4.6) 被满足. 由 (3.4.32) 即得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^{2A}(h)\le(2h)^A\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k^A.$$

另一方面, 通过回顾 (3.4.9) 的证明并注意到 $E(X_k(t+2h)-X_k(t+h))(X_k(t+h)-X_k(t))\le 0$, 易知

$$\liminf_{h\downarrow 0}\sigma^{*^2}(h)/h>0.$$

故我们有

$$\limsup_{h\downarrow 0}\sum_{k=1}^{\infty}(\sigma_k(h)/\sigma^*(h))^{2A}<\infty.$$

这就是说, (3.4.31) 被满足. 由推论 3.4.2 即得推论 3.4.3 的结论.

3.4.2 大增量

首先, 我们仍考察存在 $\alpha>0$, $\sigma^{*2}(h)/h^{\alpha}$ 是拟增函数的情形.

设 $0<a_T\le T$, a_T 是 T 的连续函数, 满足 $a_T\to\infty$ $(T\to\infty)$. 设 y_T 是下述方程的解:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_Ty_T}{T\log\sigma^*(a_T)}\right)^{\sigma^{*2}(a_T)/\sigma_k^2(a_T)}=\frac{a_T}{T\log\sigma^*(a_T)}. \tag{3.4.33}$$

下列定理是定理 3.4.1 在大增量情形的一个类比 (Lin 1998).

定理 3.4.2 假设对某 $\alpha>0$, $\sigma^{*^2}(h)/h^{\alpha}$ 是拟增的, 且存在正数 h_0, A 和 B 使得对任何 $h\ge h_0$ 满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\sigma_k(h)/\sigma^*(h))^{A}<B. \tag{3.4.34}$$

则

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\sup_{0\le s\le a_T}\max_{k\ge 1}\frac{|X_k(t+s)-X_k(t)|}{\sigma^*(a_T)(2\log((T\log\sigma^*(a_T))/a_T))^{1/2}}\le 1\quad \text{a.s.} \tag{3.4.35}$$

若条件 (3.4.34) 被如下条件代替: 存在正数 h_1, c_1, T_0 和 C 使得对任何 $h\ge h_1$ 和每一 $k\ge 1$ 有

$$\inf_{0\le s\le h}\frac{\sigma^*(s)}{\sigma_k(s)}\ge c_1\frac{\sigma^*(h)}{\sigma_k(h)}, \tag{3.4.36}$$

且对任何 $T \geq T_0$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{a_T}{T\log\sigma^*(a_T)}\Big)^{\sigma^{*2}(a_T)/\sigma_k^2(a_T)} < C, \tag{3.4.37}$$

则 (3.4.35) 仍正确. 若还假设 $X_k(\cdot), k=1,2,\cdots$, 是独立的, 对 $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$,

$$E(X_k(t_2)-X_k(t_1))(X_k(t_4)-X_k(t_3)) \leq 0 \tag{3.4.38}$$

且

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\log(T/a_T)}{\log\log\sigma^*(a_T)} = \infty, \tag{3.4.39}$$

则有

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\leq t\leq T-a_T}\sup_{0\leq s\leq a_T}\max_{k\geq 1}\frac{|X_k(t+s)-X_k(t)|}{\sigma^*(a_T)(2\log(T/a_T))^{1/2}} = 1 \quad \text{a.s.} \tag{3.4.40}$$

和

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\leq t\leq T-a_T}\max_{k\geq 1}\frac{|X_k(t+a_T)-X_k(t)|}{\sigma^*(a_T)(2\log(T/a_T))^{1/2}} = 1 \quad \text{a.s.} \tag{3.4.41}$$

注 3.4.2 类似于注 3.4.1, 当 T 满足 $\sigma^*(a_T) \geq e^{A/2}$ 时, 我们有

$$y_T \geq \Big(\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{\sigma_k(a_T)}{\sigma^*(a_T)}\Big)^A\Big)^{-1}.$$

因此, 由 (3.4.34), 对充分大的 T 有

$$y_T \geq B^{-1} > 0. \tag{3.4.42}$$

此外, 我们可证下列事实: $y_T \leq 1$ 且方程 (3.4.33) 的解在条件 (3.4.37) 下存在且唯一. 而 (3.4.37) 可从 (3.4.34) 推得.

定理 3.4.2 的证明 存在 $d > 0$ 使得对任何 $0 < h \leq 1$ 有 $\sigma^{*2}(h) \geq dh^2$ (参见 (3.4.9)). 若 $h_0 > 1$, 则对任何 $1 < h \leq h_0$,

$\sigma^{*2}(h) \geq \sigma^{*2}(1) \geq h^2\sigma^{*2}(1)/h_0^2$. 因此，若令 $d' = d \wedge (\sigma^{*2}(1)/h_0^2)$，则对任何 $h \leq h_0$ 就有 $\sigma^{*2}(h) \geq d'h^2$, 由此即得：对 $h \leq h_0$ 有

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\sigma_k(h)/\sigma^*(h))^A \leq {d'}^{-A/2}h^{-A}\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^A(h_0) =: d_1h^{-A}, \quad (3.4.43)$$

其中 $d_1 = {d'}^{-A/2}\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^A(h_0)$.

设 $\theta > 1$, 定义 $A_i = \{T; \theta^{i-1} \leq \sigma^*(a_T) < \theta^i\}$, $A_{ij} = \{T; \theta^{j-1} \leq T/a_T < \theta^j, T \in A_i\}$, $a_{ij} = \sup\{a_T; T \in A_{ij}\}$, $T_{ij} = \sup\{T; a_T = a_{ij}, T \in A_{ij}\}$, $T'_{ij} = \sup\{T; T - a_T = \sup_{T\in A_{ij}}(T - a_T), T \in A_{ij}\}$ 和 $J = \max\{j; \theta^j \leq \max_{T>0} T/a_T\}$. 则 $J \leq \infty$ 且

$$\begin{aligned}
&\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\leq t\leq T-a_T}\sup_{0\leq s\leq a_T}\max_{k\geq 1}\frac{|X_k(t+s)-X_k(t)|}{\sigma^*(a_T)(2\log((T\log\sigma^*(a_T))/a_T))^{1/2}}\\
&\leq \limsup_{i\to\infty}\max_{1\leq j<J}\sup_{0\leq t\leq T'_{ij}-a_{T'_{ij}}}\sup_{0\leq s\leq a_{ij}}\max_{k\geq 1}|X_k(t+s)-X_k(t)|/\\
&\qquad\left[\theta^{i-1}(2\log(\theta^{j-1}\log\theta^{i-1}))^{1/2}\right]\\
&\leq \limsup_{i\to\infty}\max_{1\leq j<J}\sup_{0\leq t\leq T'_{ij}-a_{T'_{ij}}}\sup_{0\leq s\leq a_{ij}}\max_{k\geq 1}\theta^2|X_k(t+s)-X_k(t)|/\\
&\qquad\left[\sigma^*(a_{ij})(2\log((T_{ij}\log\sigma^*(a_{ij}))/a_{ij})^{1/2}\right]. \qquad (3.4.44)
\end{aligned}$$

对任何 $\varepsilon > 0$, 设 $r = r(\varepsilon) > 0$ 下面待定. 令 $r_{ij} = a_{ij}/2^r$. 对任何 $t > 0$, 令 $t_r := t_{r_{ij}} = [t/r_{ij}]r_{ij}$. 写

$$\begin{aligned}
|X_k(t+s)-X_k(t)| &\leq |X_k((t+s)_r)-X_k(t_r)|\\
&\quad+\sum_{l=0}^{\infty}|X_k((t+s)_{r+l+1})-X_k((t+s)_{r+l})|\\
&\quad+\sum_{l=0}^{\infty}|X_k(t_{r+l+1})-X_k(t_{r+l})|. \qquad (3.4.45)
\end{aligned}$$

类似于 (3.4.14) 并注意到 (3.4.42), 对充分大的 T, 若 $T'_{ij} \leq T_{ij}$,

我们有

$$p_0 := P\Big\{\sup_{0\le t\le T'_{ij}-a_{T'_{ij}}}\ \sup_{0\le s\le a_{ij}-r_{ij}}\ \max_{k\ge1}|X_k((t+s)_r)-X_k(t_r)|/$$

$$\big[\sigma^*(a_{ij})(2\log((T_{ij}\log\sigma^*(a_{ij}))/a_{ij}))^{1/2}\big]\ge 1+\varepsilon\Big\}$$

$$\le P\Big\{\sup_{0\le t\le T'_{ij}-a_{T'_{ij}}}\ \sup_{0\le s\le a_{ij}-r_{ij}}\ \max_{k\ge1}|X_k((t+s)_r)-X_k(t_r)|/$$

$$\big[\sigma^*(a_{ij})(2\log((T_{ij}\log\sigma^*(a_{ij}))/(a_{ij}y_{T_{ij}})))^{1/2}\big]\ge 1+\varepsilon/2\Big\}$$

$$\le \frac{4T'_{ij}}{a_{ij}}2^{2r}\sum_{k=1}^{\infty}\exp\Big\{-\Big(1+\frac{\varepsilon}{2}\Big)^2\Big(\log\frac{T_{ij}\log\sigma^*(a_{ij})}{a_{ij}y_{T_{ij}}}\Big)\frac{\sigma^{*2}(a_{ij})}{\sigma_k^2(a_{ij})}\Big\}$$

$$\le \frac{4T'_{ij}}{a_{ij}}2^{2r}\Big(\frac{a_{ij}}{T_{ij}\log\sigma^*(a_{ij})}\Big)^{1+\varepsilon}\le c\Big(\frac{T_{ij}}{a_{ij}}\Big)^{-\varepsilon}(\log\sigma^*(a_{ij}))^{-1-\varepsilon}$$

$$\le c\theta^{-\varepsilon j}(i\log\theta)^{-1-\varepsilon}. \tag{3.4.46}$$

否则，我们有

$$T_{ij}\le T'_{ij}\le\theta^j a_{T'_{ij}}\le\theta T_{ij},$$

因此 (3.4.46) 也成立. 结合 (3.4.15) 和 (3.4.46) 的证明思路，并用条件 (3.4.34) 代替 (3.4.11), 我们有：当 r 和 T 充分大时,

$$p_1 := P\Big\{\sup_{0\le t\le T'_{ij}-a_{T'_{ij}}}\ \sup_{a_{ij}-r_{ij}\le s\le a_{ij}}\ \max_{k\ge1}|X_k((t+s)_r)-X_k(t_r)|/$$

$$\big[\sigma^*(a_{ij})(2\log((T_{ij}\log\sigma^*(a_{ij}))/a_{ij}))^{1/2}\big]\ge\varepsilon/2\Big\}$$

$$\le c\frac{T'_{ij}}{a_{ij}}\Big(\frac{a_{ij}}{T_{ij}\log\sigma^*(a_{ij})}\Big)^{2+A}\Big(\frac{\sigma^*(2a_{ij}/2^r)}{\sigma^*(a_{ij})}\Big)^{A}\Big(\frac{2a_{ij}}{2^r}\Big)^{-A}$$

$$\le\frac{cT'_{ij}a_{ij}}{(T_{ij}\log\sigma^*(a_{ij}))^{2+A}}\le c\theta^{-j}i^{-2-A}. \tag{3.4.47}$$

在条件 (3.4.36) 和 (3.4.37) 下，我们也有相同的界.

考察 (3.4.45) 右边的第一个级数. 设 $b_{r_{ij}}=\sup\{b;$ $a_{ij}/2^{r+[\log_2 ba_{ij}]+1}\ge h_0\}$ 和 $l_0=[\log_2(b_{r_{ij}}a_{ij})]$. 令 $D=3/c_1$,

$x_l^2 := x_{l_{ij}}^2 = 2D\log(T_{ij}\log\sigma^*(a_{ij})/a_{ij}) + 2(1+A)l$. 若条件 (3.4.34) 被满足，则由 (3.4.34) 和 (3.4.43) 对充分大的 r 和 T 有

$$\begin{aligned}
p_2 &:= P\Big\{\sup_{0\le t\le T'_{ij}-a_{T'_{ij}}}\ \sup_{0\le s\le a_{ij}}\ \max_{k\ge 1}\sum_{l=0}^{\infty}|X_k((t+s)_{r+l+1}) \\
&\qquad - X_k((t+s)_{r+l})| \ge \sum_{l=0}^{\infty} x_l\sigma^*(a_{ij}/2^{r+l+1})\Big\} \\
&\le \frac{2T'_{ij}}{a_{ij}}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}2^{r+l+1}e^{-(1+A)l}\Big(\frac{a_{ij}y_{T_{ij}}}{T_{ij}\log\sigma^*(a_{ij})}\Big)^2 \\
&\quad\cdot\exp\Big\{-\Big(\frac{D\sigma^{*2}(a_{ij}/2^{r+l+1})}{\sigma_k^2(a_{ij}/2^{r+l+1})}-2\Big)\log\frac{T_{ij}\log\sigma^*(a_{ij})}{a_{ij}y_{T_{ij}}}\Big\} \\
&\le c\cdot\frac{T'_{ij}}{a_{ij}}\Big(\frac{a_{ij}}{T_{ij}\log\sigma^*(a_{ij})}\Big)^2\Big(\sum_{l=0}^{l_0}+\sum_{l=l_0+1}^{\infty}\Big)\sum_{k=1}^{\infty}2^le^{-(1+A)l} \\
&\quad\cdot\Big(\frac{\sigma_k(a_{ij}/2^{r+l+1})}{\sigma^*(a_{ij}/2^{r+l+1})}\Big)^A \\
&\le c\cdot\frac{T'_{ij}}{a_{ij}}\Big(\frac{a_{ij}}{T_{ij}\log\sigma^*(a_{ij})}\Big)^2\Big(\sum_{l=0}^{l_0}B2^le^{-(1+A)l} \\
&\quad+\sum_{l=l_0+1}^{\infty}d_12^le^{-(1+A)l}\cdot(a_{ij}/2^{r+l+1})^{-A}\Big) \\
&\le c\cdot\frac{T'_{ij}}{a_{ij}}\Big(\frac{a_{ij}}{T_{ij}\log\sigma^*(a_{ij})}\Big)^2\le c\theta^{-j}(i\log\theta)^{-2}.
\end{aligned}\tag{3.4.48}$$

又若条件 (3.4.36) 和 (3.4.37) 被满足，我们也有同样的界.

对 (3.4.45) 右边的第二个级数，我们也有同样的结论.

此外，类似于 (3.4.20)，当 r 充分大时，我们有

$$\sum_{l=0}^{\infty}x_l\sigma^*(a_{ij}/2^{r+l+1})\le\frac{\varepsilon}{4}\sigma^*(a_{ij})\Big(\log\frac{T_{ij}\log\sigma^*(a_{ij})}{a_{ij}}\Big)^{1/2}.\tag{3.4.49}$$

综合这些估计，我们得

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{J}P\Big\{\sup_{0\le t\le T'_{ij}-a_{T'_{ij}}}\ \sup_{0\le s\le a_{ij}}\ \max_{k\ge 1}|X_k(t+s)-X_k(t)|/$$

$$\left[\sigma^*(a_{ij})(2\log((T_{ij}\log\sigma^*(a_{ij}))/a_{ij}))^{1/2}\right] \geq 1+2\varepsilon\Big\} < \infty.$$

所以由 Borel-Cantelli 引理，(3.4.44) 右边概率为 1 地不超过 1. 这就证明了 (3.4.35).

现在来证 (3.4.41). 注意到 (3.4.35), 只需证明

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\leq t\leq T-a_T}\max_{k\geq 1}\frac{|X_k(t+a_T)-X_k(t)|}{\sigma^*(a_T)(2\log(T/a_T))^{1/2}} \geq 1 \quad \text{a.s.} \qquad (3.4.50)$$

利用 (3.4.39), Slepian 不等式和 $\{X_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ 的独立性，对充分大的 T_n ($\uparrow\infty$), 我们有

$$\begin{aligned}
&P\Big\{\sup_{0\leq t\leq T_n-a_{T_n}}\max_{k\geq 1}\frac{|X_k(t+a_{T_n})-X_k(t)|}{\sigma^*(a_{T_n})(2\log(T_n/a_{T_n}))^{1/2}} < 1-\varepsilon\Big\}\\
&\leq P\Big\{\max_{0\leq j\leq T_n/a_{T_n}}\max_{k\geq 1}\left[X_k((j+1)a_{T_n})-X_k(ja_{T_n})\right]/\\
&\qquad \left[\sigma^*(a_{T_n})(2\log((T_n\log\sigma^*(a_{T_n}))/(a_{T_n}y_{r_n})))^{1/2}\right] < 1-\varepsilon\Big\}\\
&\leq \prod_{j=0}^{[T_n/a_{T_n}]}\prod_{k=1}^{\infty}\Big\{1-\exp\Big\{-\frac{(1-\varepsilon)\sigma^{*2}(a_{T_n})}{\sigma_k^2(a_{T_n})}\log\frac{T_n\log\sigma^*(a_{T_n})}{a_{T_n}y_{T_n}}\Big\}\Big\}\\
&\leq \prod_{j=0}^{[T_n/a_{T_n}]}\exp\Big\{-\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{a_{T_n}y_{T_n}}{T_n\log\sigma^*(a_{T_n})}\Big)^{(1-\varepsilon)\sigma^{*2}(a_{T_n})/\sigma_k^2(a_{T_n})}\Big\}\\
&\leq \exp\Big\{-\frac{T_n}{a_{T_n}}\Big(\frac{a_{T_n}}{T_n\log\sigma^*(a_{T_n})}\Big)^{1-\varepsilon}\Big\}\\
&\leq \exp\Big\{-\Big(\frac{T_n}{a_{T_n}}\Big)^{\varepsilon/2}\Big\}\to 0. \qquad (3.4.51)
\end{aligned}$$

因此 (3.4.41) 得证.

最后我们来证明 (3.4.40). 由 (3.4.35), 只需证明 “lim inf” 概率为 1 地不小于 1. 记 $a'_{ij}=\inf\{a_T;T\in A_{ij}\}$, $t'_{ij}=\inf\{T;a_T=a'_{ij},T\in A_{ij}\}$, $t_{ij}=\inf\{T;T-a_T=\inf_{T\in A_{ij}}(T-a_T),T\in A_{ij}\}$. 我们有

$$\liminf_{T\to\infty}\sup_{0\leq t\leq T-a_T}\sup_{0\leq s\leq a_T}\max_{k\geq 1}\frac{|X_k(t+s)-X_k(t)|}{\sigma^*(a_T)(2\log(T/a_T))^{1/2}}$$

$$\geq \liminf_{i\to\infty} \min_{1\leq j\leq J} \sup_{0\leq t\leq t_{ij}-a_{t_{ij}}} \sup_{0\leq s\leq a'_{ij}} \max_{k\geq 1} \frac{|X_k(t+s)-X_k(t)|}{\theta^i(2\log\theta^j)^{1/2}}$$

$$\geq \liminf_{i\to\infty} \min_{1\leq j\leq J} \max_{1\leq l\leq t_{ij}/a'_{ij}} \max_{k\geq 1} |X_k((l+1)a'_{ij}) - X_k(la'_{ij})|/$$

$$\left[\theta^2\sigma^*(a'_{ij})(2\log((t'_{ij}\log\sigma^*(a'_{ij}))/(a'_{ij}y_{t'_{ij}})))^{1/2}\right].$$

从而，类似于 (3.4.51) 得

$$P\left\{\max_{0\leq l\leq t_{ij}/a'_{ij}} \max_{k\geq 1} \frac{|X_k((l+1)a'_{ij}) - X_k(la'_{ij})|}{\sigma^*(a'_{ij})(2\log((t'_{ij}\log\sigma^*(a'_{ij}))/(a'_{ij}y_{t'_{ij}})))^{1/2}} < 1-\varepsilon\right\}$$

$$\leq \exp\left\{-\frac{t_{ij}}{a'_{ij}}\left(\frac{a'_{ij}}{t'_{ij}\log\sigma^*(a'_{ij})}\right)^{1-\varepsilon}\right\}$$

$$\leq \exp\{-(t'_{ij}/a'_{ij})^{\varepsilon/2}\log\sigma^*(a'_{ij})\} \leq \exp\{-\theta^{(j-1)\varepsilon/2}(i\log\theta)\}.$$

这里第二个不等式也是由于 (3.4.39). 因此由 Borel-Cantelli 引理, (3.4.40) 得证. 定理 3.4.2 证毕.

现在我们考察当 $h\to\infty$ 时 $\sigma^{*2}(h)\to\sigma^{*2}<\infty$ 的情形. 设 $\sigma_k^2=\lim_{h\to\infty}\sigma_k^2(h)$ 且 z_T 是下述方程的解:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_T z_T}{T}\right)^{\sigma^{*2}/\sigma_k^2} = \frac{a_T}{T}. \tag{3.4.52}$$

继续使用在上节中引入的 $d(m,k)$, $L_m x$ 等记号.

定理 3.4.3 假设当 $h\to\infty$ 时, $\sigma^*(h)\to\sigma^*$ 且存在 $A>0$ 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^A<\infty. \tag{3.4.53}$$

又假设存在 $2\leq\alpha<e$, $0<\delta<1-1/\alpha$ 和正整数 $m\geq 1$ 使得

$$\int_1^{\infty}\sigma^*(\alpha^{-x^2})dx<\infty, \tag{3.4.54}$$

$$a_T\leq Td(m,(L_mT)^{\delta+1/\alpha})^{-1}. \tag{3.4.55}$$

那么

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\sup_{0\le s\le a_T}\max_{k\ge1}\frac{|X_k(t+s)-X_k(t)|}{\sigma^*(2\log(T/a_T))^{1/2}}\le 1\quad\text{a.s.}\tag{3.4.56}$$

若还设 $X_k(\cdot),k=1,2,\cdots$, 独立且 (3.4.38) 被满足, 那么

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\sup_{0\le s\le a_T}\max_{k\ge1}\frac{|X_k(t+s)-X_k(t)|}{\sigma^*(2\log(T/a_T))^{1/2}}=1\quad\text{a.s.},\tag{3.4.57}$$

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\max_{k\ge1}\frac{|X_k(t+a_T)-X_k(t)|}{\sigma^*(2\log(T/a_T))^{1/2}}=1\quad\text{a.s.}\tag{3.4.58}$$

证明 与定理 3.4.2 类似, 条件 (3.4.53) 保证了方程 (3.4.52) 的解存在且唯一. 此外, 存在 $0<b<1$ 使得 $z_T\ge b$, 由条件 (3.4.55) 知 (3.3.62) 仍正确.

对 $\theta>1$, 定义 $A_j=\{T;\theta^{j-1}\le T/a_T<\theta^j\}$, $a_j=\sup\{a_T;T\in A_j\}$, $T_j=\sup\{T;a_T=a_j,T\in A_j\}$ 和 $T_j'=\sup\{T;T-a_T=\sup_{T\in A_j}(T-a_T),T\in A_j\}$. 给定 $r>0$, 对任何 $t>0$ 令 $t_r^j:=t_r(a_j)=[td(m+2,r)/a_j](a_j/d(m+2,r))$. 写

$$\begin{aligned}|X_k(t+s)-X_k(t)|&\le|X_k((t+s)_r^j)-X_k(t_r^j)|\\&\quad+\sum_{l=0}^{\infty}|X_k((t+s)_{r+l+1}^j)-X_k((t+s)_{r+l}^j)|\\&\quad+\sum_{l=0}^{\infty}|X_k(t_{r+l+1}^j)-X_k(t_{r+l}^j)|.\end{aligned}\tag{3.4.59}$$

对 (3.4.55) 中的 $\delta>0$, 令 δ_1 满足 $1-1/\alpha-\delta<\delta_1<1-1/\alpha$. 又记 $\varepsilon(a_T)=d(m-1,(L_ma_T)^{1-\delta_1})/L_1a_T$, $r:=r(a_j)=L_{m+2}a_j^{\varepsilon(a_j)}$, $r':=r'(a_j)=L_{m+2}a_j$. 那么 $d(m+2,r)=a_j^{\varepsilon(a_j)}$ 且 $d(m+2,r')=a_j$, 此外,

$$\begin{aligned}0<r'-r&=L_{m+2}a_j-L_m\Big[(L_2a_j)\Big(1+\frac{L_1\varepsilon(a_j)}{L_2a_j}\Big)\Big]\\&=-L_1(1-\delta_1)<1.\end{aligned}\tag{3.4.60}$$

类似于 (3.4.46), 若 $T_j'/T_j \le 1$, 则我们有

$$p_0' := P\Big\{\sup_{0\le t\le T_j'-a_{T_j'}}\sup_{0\le s\le a_j}\max_{k\ge 1}\frac{|X_k((t+s)_r^j)-X_k(t_r^j)|}{\sigma^*(2\log(T_j/a_j))^{1/2}}\ge 1+\varepsilon\Big\}$$
$$\le \frac{4T_j'}{a_j}d(m+2,r)^2\Big(\frac{a_j}{T_j}\Big)^{1+\varepsilon}\le 4a_j^{2\varepsilon(a_j)+\varepsilon}\Big(\frac{T_j'}{T_j}\Big)T_j^{-\varepsilon}$$
$$\le 5a_j^{2\varepsilon(a_j)+\varepsilon}T_j^{-\varepsilon}. \tag{3.4.61}$$

在 $T_j'/T_j > 1$ 的情形，我们有

$$T_j < T_j' \le \theta^j a_{T_j'} \le \theta^j a_j \le \theta T_j.$$

因此在任何情形，只要 $\theta < 5/4$, (3.4.61) 总成立. 由条件 (3.4.55) 得

$$a_j^{2\varepsilon(a_j)+\varepsilon/2}\le T_j^{2\varepsilon(a_j)+\varepsilon/2}d(m,(L_mT_j)^{\delta+1/\alpha})^{-\varepsilon/2}\le T_j^{\varepsilon/2}.$$

把上式代入 (3.4.61) 得

$$p_0'\le 5(T_j/a_j)^{-\varepsilon/2}\le 5\theta^{-(j-1)\varepsilon/2}.$$

令 $x_l'^2 := x_{lj}'^2 = 4\log(T_j/a_j)+2(1+A)d(m+1,r+l+1)$. 则有

$$p_2' := P\Big\{\sup_{0\le t\le T_j'-a_{T_j'}}\sup_{0\le s\le a_j}\max_{k\ge 1}\Big|\sum_{l=0}^{\infty}\Big(X_k((t+s)_{r+l+1}^j)$$
$$-X_k((t+s)_{r+l}^j)\Big)\Big|$$
$$\ge \sum_{l=0}^{\infty}x_l'\sigma^*(a_j/d(m+2,r+l+1))\Big\}$$
$$\le \frac{4T_j'}{a_j}\Big(\frac{a_j}{T_j}\Big)^2\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}d(m+2,r+l+1)e^{-(1+A)d(m+1,r+l+1)}$$
$$\cdot\exp\Big\{-\Big(\frac{2\sigma^{*2}(a_j/d(m+2,r+l+1))}{\sigma_k^2(a_j/d(m+2,r+l+1))}-2\Big)\log\frac{T_j}{a_j}\Big\}$$
$$\le \frac{4a_j}{T_j}\frac{T_j'}{T_j}\sum_{l=0}^{\infty}d(m+2,r+l+1)e^{-(1+A)d(m+1,r+l+1)}$$
$$\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{\sigma_k(a_j/d(m+2,r+l+1))}{\sigma^*(a_j/d(m+2,r+l+1))}\Big)^A. \tag{3.4.62}$$

注意到 $0 < r' - r < 1$ (见 (3.4.60)), 对 $l \geq 0$ 我们有

$$a_j/d(m+2, r+l+1) \leq d(m+2, r')/d(m+2, r+1) \leq 1.$$

从而利用事实：对 $0 < h \leq 1$ 有 $\sigma^{*2}(h) \geq dh^2$, 我们得

$$\sigma^*(a_j/d(m+2, r+l+1))^{-A} \leq d^{-A/2}(a_j/d(m+2, r+l+1))^{-A},$$

且进一步

$$p_2' \leq \frac{5d^{-A/2}a_j^{1-A}}{T_j}\sum_{l=0}^{\infty}(\alpha/e)^{(1+A)d(m+1,r+l+1)} \leq c\theta^{-j}.$$

对 (3.4.59) 右边的第二个级数，我们有同样的估计.

令 $\beta > 0$ 满足 $r' - r + \beta < 1$. 则当 T 充分大时，由条件 (3.4.54) 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{\infty} d(m+1, r+l+1)^{1/2}\sigma^*(a_j/d(m+2, r+l+1)) \\
&\leq \sum_{l=0}^{\infty}\left(1 - \left(\frac{d(m+1, r+l+1-\beta)}{d(m+1, r+l+1)}\right)^{1/2}\right)^{-1} \\
&\qquad \cdot \int_{d(m+1,r+l+1-\beta)^{1/2}}^{d(m+1,r+l+1)^{1/2}} \sigma^*(a_j\alpha^{-y^2})dy \\
&\leq \left(1 - \left(\frac{d(m+1, r+1-\beta)}{d(m+1, r+1)}\right)^{1/2}\right)^{-1} \\
&\qquad \cdot \int_{d(m+1,r+1-\beta)^{1/2}}^{\infty} \sigma^*(\alpha^{d(m+1,r')-y^2})dy \\
&\leq \left(1 - \left(\frac{d(m+1, r+1-\beta)}{d(m+1, r+1)}\right)^{1/2}\right)^{-1} \\
&\qquad \cdot \int_{d(m+1,r+1-\beta)^{1/2}-d(m+1,r')^{1/2}}^{\infty} \sigma^*(\alpha^{-y^2})dy \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned} \tag{3.4.63}$$

显然，由 (3.4.63) 可知对充分大的 T 有

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sigma^*(a_j/d(m+2, r+l+1)) \leq \frac{\varepsilon}{8}\sigma^*.$$

于是

$$\sum_{l=0}^{\infty} x_l' \, \sigma^*(a_j/d(m+2, r+l+1)) \le \frac{\varepsilon}{2}\sigma^*\Big(2\log\frac{T_j}{a_j}\Big)^{1/2}.$$

综合这些结果我们得

$$\sum_{j=1}^{\infty} P\Big\{\sup_{j\ge1}\sup_{0\le t\le T_j'-a_{T_j'}}\sup_{0\le s\le a_j}\max_{k\ge1}\frac{|X_k(t+s)-X_k(t)|}{\sigma^*(2\log(T_j/a_j))^{1/2}} \le 1+2\varepsilon\Big\} < \infty,$$

由此即得 (3.4.56).

若我们用 $(1+\varepsilon)\sigma^*(a_T)$ 代替 σ^* (注意到对充分大的 T, $\sigma^* \le (1+\varepsilon)\sigma^*(a_T)$), (3.4.57) 和 (3.4.58) 的证明分别类似于 (3.4.40) 和 (3.4.41), 故从略. 定理 3.4.3 证毕.

作为定理 3.4.3 的一个应用, 我们对 l^∞ 值 O-U 过程建立大增量结果. 设 $\{Y(t); -\infty < t < \infty\} = \{X_k(t); -\infty < t < \infty\}_{k=1}^{\infty}$ 是独立 O-U 过程序列, 具有系数 $\gamma_k \ge 0$ 和 $\lambda_k > 0$.

推论 3.4.4 *假设存在* $A > 0$, *使得*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\gamma_k/\lambda_k\Big)^A < \infty,$$

且存在 $2 \le \alpha < e, 0 < \delta < 1-1/\alpha$ *和整数* $m \ge 1$ *使得* (3.4.54) *和* (3.4.55) *被满足. 则*

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\sup_{0\le s\le a_T}\max_{k\ge1}\frac{|X_k(t+s)-X_k(t)|}{\sigma^*(2\log(T/a_T))^{1/2}} = 1 \quad \text{a.s.},$$

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\max_{k\ge1}\frac{|X_k(t+a_T)-X_k(t)|}{\sigma^*(2\log(T/a_T))^{1/2}} = 1 \quad \text{a.s.}$$

第四章 Gauss 过程的重对数律和增量的几乎处处下极限

自从 Chung 重对数律 (1948) 和 Strassen 泛函重对数律 (1964) 出现以来, 对某些类型 Gauss 过程的泛函重对数律 (FLIL) 及它们的速度已被 Oodaira (1972), Bolthausen (1978), Grill (1987), Goodman 和 Kuelbs (1988, 1991a, b) 等所讨论. 借助于小球概率估计, 对各种 Gauss 过程和 Gauss 场的 Chung 重对数律已被 Shao (1993), Kuelbs, Li 和 Talagrand (1994), Kuelbs, Li 和 Shao (1995), Monrad 和 Rootzen (1995), Shao 和 Wang (1995a) 等所研究. 对 Gauss 过程的其他重对数律, 小球概率估计, 不可微模也被若干作者所讨论. 在近十年中, 许多作者对所有这些问题, 特别对下极限性质给予了很多关注. 在本章中, 我们将汇集并详细阐述关于各种 Gauss 过程的一系列重对数律和增量的几乎处处下极限的最近结果.

在 §4.1 中, 我们介绍一类 Gauss 过程的 Strassen 泛函重对数律及其精确收敛速度, 以及 Gauss 过程的 Erdös 和 Révész 重对数律. 在 §4.2 中, 建立了 Gauss 过程的小球概率, 由此证明了 Gauss 过程的 Chung 重对数律. 对 Gauss 场的类似结果被介绍在 §4.3 中. 在 §4.4 中, 给出具有平稳增量的 Gauss 过程增量的 a.s. 下极限结果. 在 §4.5 中, 研究了两参数 Gauss 过程的下极限. §4.6 节介绍 Gauss 过程的其他轨道性质, 如 p 变差及其有关的分形性质.

§4.1 Gauss 过程的重对数律

4.1.1 Strassen 重对数律及其收敛速度

设 $\{W(t); t \geq 0\}$ 是 Wiener 过程, $C[0,1]$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数空间, 记

$$\mathcal{K} = \left\{ f(t) = \int_0^t g(s)ds;\ 0 \le t \le 1, \int_0^1 g^2(s)ds \le 1 \right\}.$$

那么 $\mathcal{K}$ 是 $C[0,1]$ 的凸对称紧致子集，且 $\mathcal{K}$ 也是具有再生核 (r.k.) 函数 $R(s,t) = s \wedge t$ 的再生核 Hilbert 空间的单位球. 定义

$$f_n(t) = W(nt)/\sqrt{2n \log\log n}, \quad 0 \le t \le 1.$$

那么 $\{f_n(t); n \ge 3\}$ 是概率为 1 地具有 $C[0,1]$ 中的样本轨道的随机过程序列. Strassen (1964) 证明了下述定理.

定理 S *在 $C[0,1]$ 中，序列 $\{f_n(t)\}$ 概率为 1 地相对紧且它的极限点集与 $\mathcal{K}$ 重合.*

Oodaira (1972) 拓广上述定理到包含 Wiener 过程的 Gauss 过程类上. 设 $\{X(t); t \ge 0\}$ 是一个可分、可测实 Gauss 过程, $X(0) = 0, EX(t) = 0$ 且协方差为

$$R(s,t) = EX(s)X(t).$$

记 $\sigma^2(t) = R(t,t)$. 假设下列条件被足:

(I) 对任给 $T > 0$, 存在正的非降函数 $g(h,T), h > 0$, 使得对所有的 $t, t+h \in [0,T]$, 当 $h \to 0$ 时

$$|R(t+h,t+h) - 2R(t+h,t) + R(t,t)| \le g(h,T) \to 0, \tag{4.1.1}$$

$$\{g(1,T)\}^{-1/2} \int_1^\infty g^{1/2}(e^{-u^2},T)du \le C < \infty, \tag{4.1.2}$$

且

$$\sigma^2(T)/g(1,T) \uparrow \infty \quad (T \to \infty); \tag{4.1.3}$$

(II) 存在正函数 $v(r), r > 0$ 使得 $v(r) \uparrow$, 且对所有的 $r > 0, s, t \ge 0$ 有

$$R(rs,rt) = v(r)R(s,t). \tag{4.1.4}$$

在条件 (I) 下, 由定理 2.1.3 知, 对任一 $T > 0$, 过程 $\{X(t); 0 \le t \le T\}$ a.s. 具有连续样本轨道.

例　具有协方差核

$$R(s,t)=\int_0^{s\wedge t}(s-\lambda)^\beta(t-\lambda)^\beta d\lambda,\quad -1/2<\beta<\infty$$

的 Gauss 过程满足条件 (I) 和 (II). 这一类过程包含了 Wiener 过程 $\{W(t)\}$(取 $\beta=0$) 和过程 $\left\{\int_0^t W(u)du\right\}$ (取 $\beta=1$). 分数 Wiener 过程是具有平稳增量和协方差核

$$R(s,t)=(s^{2\alpha}+t^{2\alpha}-|s-t|^{2\alpha})/2,\quad 0<\alpha\le 1, \tag{4.1.5}$$

的 Gauss 过程，它也满足条件 (I) 和 (II).

定义

$$\eta_n(t,\omega)=X(nt,\omega)/(2\sigma^2(n)\log\log n)^{1/2},\quad 0\le t\le 1,\ n\ge 3. \tag{4.1.6}$$

设 $H(\mathcal{R})$ 是具有 r.k. 函数 $R(s,t), 0\le s,t\le 1$, 的 r.k. Hilbert 空间. 记

$$\mathbf{K}=\{h\in H(\mathcal{R});\ \|h\|_H\le 1/\sigma(1)\},$$

其中 $\|\cdot\|_H$ 为 $H(\mathcal{R})$ 的范数.　Oodaira (1972) 证明了下述结果.

定理 4.1.1　若条件 (I) 和 (II) 被满足，那么序列 $\{\eta_n(t)\}$ 的极限点集概率为 1 地被包含于集合 $\mathcal{K}$ 中.

Grill (1987) 得到了下述关于标准 Wiener 过程 $\{W(t); 0\le t<\infty\}$ 的 Strassen 泛函重对数律收敛于 $\mathcal{K}$ 的"最佳"速度:

$$\limsup_{n\to\infty}\inf_{f\in\mathcal{K}}\|f(t)-\eta_n(t)\|(\log\log n)^\alpha=\begin{cases}0\ , & \alpha<2/3,\\ \infty\ , & \alpha>2/3.\end{cases}$$

这两个结论等价于

$$P\Big\{\eta_n(t)\in\mathcal{K}^{\varepsilon_n}\ \text{最终成立}\Big\}=1,\quad \alpha<2/3$$

和

$$P\Big\{\eta_n(t)\notin\mathcal{K}^{\varepsilon_n},\ \text{i.o.}\Big\}\doteq 1,\quad \alpha>2/3,$$

其中 $\varepsilon_n=(\log\log n)^{-\alpha},\mathcal{K}^{\varepsilon_n}=\{g;g\in C[0,1],\inf_{f\in\mathcal{K}}\|g(t)-f(t)\|<\varepsilon_n\}$.

称过程 $\{X(t);0\le t<\infty\}$ 是具有指数 α 自相似的，若对每一 $a>0$, 过程 $\{X(at);0\le t<\infty\}$ 和过程 $\{a^{2\alpha}X(t);0\le t<\infty\}$ 同分布．一个具有平稳增量的零均值的自相似 Gauss 过程 $\{Y(t);0\le t<\infty\}$ 是分数 Wiener 过程．对 $0\le t<\infty$, $0<\alpha<1$, 我们有

$$Y(t)=V(t)+X(t),\quad t\ge 0$$

其中

$$X(t)=\int_0^t(t-s)^{(2\alpha-1)/2}dW(s),\tag{4.1.7}$$

$$V(t)=\int_{-\infty}^0\Big\{(t-s)^{(2\alpha-1)/2}-(-s)^{(2\alpha-1)/2}\Big\}dW(s).\tag{4.1.8}$$

当 $\alpha=1/2$ 时， $V=0$, 因此 $\{X(t);t\ge 0\}$ 和 $\{Y(t),t\ge 0\}$ 都是 Wiener 过程． Goodman 和 Kuelbs (1991a) 证明了

定理 4.1.2 设 $\{X(t);t\ge 0\}$ 和 $\{Y(t);t\ge 0\}$ 是 (4.1.7) 和 (4.1.8) 中定义的连续的中心化 Gauss 过程，令

$$\mathcal{K}=\Big\{f(t)=\int_0^t(t-u)^{(2\alpha-1)/2}g(u)du,0\le t\le 1,\int_0^1 g^2(u)du\le 1\Big\},\tag{4.1.9}$$

其中 $0<\alpha<1$.

(A) 若 $\gamma>0$ 充分大，那么

$$P\Big\{X(n(\cdot))/(2n^{2\alpha}\log\log n)^{1/2}\in\mathcal{K}^{\varepsilon_n}\Big\}=1,\tag{4.1.10}$$

其中

$$\varepsilon_n=\begin{cases}\gamma(\log\log\log n/\log\log n)^{2/3}, & \text{当 }\alpha\ge 1/2\text{ 时},\\ \gamma(\log\log\log n/\log\log n)^{(2\alpha+1)/(2\alpha+2)}, & \text{当 }0<\alpha<1/2\text{ 时}.\end{cases}$$

因此

$$\limsup_{n\to\infty}\inf_{f\in\mathcal{K}}\|f(t)-\eta_n(t)\|\left(\frac{\log\log\log n}{\log\log n}\right)^{-\theta}=0,$$

其中当 $\alpha\geq 1/2$ 时，$\theta>2/3$; 当 $\alpha<1/2$ 时，$\theta>(2\alpha+1)/2(\alpha+1)$.

(B) 若 $0<\alpha<1, \varepsilon_n=\gamma(\log\log n)^{-1/2}$, 且

$$\mathcal{K}=\left\{f(t)=T_\alpha g(t), 0\leq t\leq 1, \int_{-\infty}^{1} g^2(u)du\leq 1\right\},$$

其中

$$T_\alpha g(t)=\int_0^1(t-u)^{(2\alpha-1)/2}g(u)du+\int_{-\infty}^{0}((t-u)^{(2\alpha-1)/2} - (-u)^{(2\alpha-1)/2})g(u)du,$$

那么对任何 $\gamma>0$

$$P\left\{Y(n(\cdot))/(2n^{2\alpha}\log\log n)^{1/2}\in\mathcal{K}^{\varepsilon_n}\ \text{最终成立}\right\}=1. \tag{4.1.11}$$

因此对 $\eta_n(\cdot)=Y(n(\cdot))/(2n^{2\alpha}\log\log n)^{1/2}$, 当 $\theta<1/2$ 时

$$\limsup_{n\to\infty}\inf_{f\in\mathcal{K}}\|f(t)-\eta_n(t)\|(\log\log n)^{\theta}=0.$$

Goodman 和 Kuelbs (1991a) 也给出了 p 参数 Wiener 单和 p 维 Wiener 过程的 Strassen 重对数律的收敛速度.

Monrad 和 Rootzen (1995) 给出了分数 Wiener 过程的 Strassen 重对数律的精确收敛速度. 设 $H_\alpha\subseteq C[0,1]$ 是具有 r.k. 函数

$$R(s,t)=\{s^{2\alpha}+t^{2\alpha}-|s-t|^{2\alpha}\}/2,\quad 0\leq s,t\leq 1$$

的 r.k. Hilbert 空间, H_α 中的内积记为 $\langle f,g\rangle_\alpha$. 若 $f\in H_\alpha$, 我们有

$$|f(t)-f(s)|^2\leq|s-t|^\alpha\langle f,f\rangle_\alpha.$$

定理 4.1.3 设 $\langle f,f\rangle_\alpha<1$. 则当 $t\downarrow 0$ 时

$$\liminf\,(\log\log t)^{(2\alpha+1)/2}\|\eta_t-f\|=\gamma(f),\quad \text{a.s.},$$

其中常数 $\gamma(f)$ 满足：存在常数 $0<c<C<\infty$,

$$2^{-1/2}c^{\alpha}(1-\langle f,f\rangle_{\alpha})^{-\alpha}\le\gamma(f)\le 2^{-1/2}C^{\alpha}(1-\langle f,f\rangle_{\alpha})^{-\alpha}.$$

定理 4.1.4 当 $t\downarrow 0$ 或 $t\uparrow\infty$ 时，若 $\langle f,f\rangle_{\alpha}=1$，则

$$\liminf\,(\log\log t)^{(2\alpha+1)/2}\|\eta_t-f\|=\infty\quad\text{a.s.},$$

而若 $\langle f,f\rangle_{\alpha}<1$，则

$$\liminf\,(\log\log t)^{(2\alpha+1)/2}\|\eta_t-f\|<\infty\quad\text{a.s.}$$

Kuelbs, Li 和 Talagrand (1994) 研究了 Gauss 样本的下极限结果. 并给出了对 Wiener 过程的泛函型 Chung 重对数律的收敛速度的一个应用.

记

$$C_0[0,1]=\{f(x)\in C[0,1]:f(0)=0\},$$

$$Y_{t,T}(x)=\beta_T\big(W(t+a_Tx)-W(t)\big),\quad 0\le x\le 1,0\le t\le T-a_T,$$

其中 $\beta_T=\{2a_T(\log(T/a_T)+\log\log T)\}^{-1/2}$. Révész (1979) 结合定理 0.2 与定理 S 经详细计算得到

定理 R 设 a_T 是 T 的单调非降函数，满足

(i) $0<a_T\le T$,

(ii) T/a_T 非降.

那么在 $C_0[0,1]$ 中 $\{Y_{t,T}:0\le x\le 1,0\le t\le T-a_T,T\ge 3\}$ 概率为 1 地相对紧，极限点集为 $\mathcal{K}$.

若 a_T 还满足

(iii) $\lim_{T\to\infty}\big(\log(T/a_T)\big)/\log\log T=\infty$,

那么

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\inf_{f\in\mathcal{K}}\sup_{0\le x\le 1}|Y_{t,T}(x)-f(x)|=0\quad\text{a.s.},$$

且对任一 $f \in \mathcal{K}$, 有

$$\lim_{T\to\infty} \inf_{0\le t\le T-a_T} \sup_{0\le x\le 1} |Y_{t,T}(x) - f(x)| = 0 \quad \text{a.s.}$$

Chen, B. (1998) 指出，借助大偏差估计，上述定理的证明是较简单的，由此还可给出泛函连续模定理. 记

$$M_{t,h}(x) = \frac{W(t+hx) - W(t)}{(2h\log h^{-1})^{1/2}}, \quad 0 \le x \le 1.$$

定理 C 我们有

$$\lim_{h\to 0} \sup_{0\le t\le 1-h} \inf_{f\in\mathcal{K}} \sup_{0\le x\le 1} |M_{t,h}(x) - f(x)| = 0 \quad \text{a.s.},$$

且对任一 $f \in \mathcal{K}$, 有

$$\lim_{h\to 0} \inf_{0\le t\le 1-h} \sup_{0\le x\le 1} |M_{t,h}(x) - f(x)| = 0 \quad \text{a.s.}$$

最近， Wang, W. S. 利用大偏差估计给出了上述定理的精确收敛速度. 设 $f \in C_0[0,1]$, 令

$$I(f) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 (f'(x))^2\,dx, & \text{若}f\text{是绝对连续的,} \\ \infty, & \text{否则.} \end{cases}$$

定理 W.1 对充分大的 $\gamma > 0$, 有

$$\mathrm{P}\left\{ \sup_{0\le t\le 1-h} \inf_{f\in\mathcal{K}} \sup_{0\le x\le 1} |M_{t,h}(x) - f(x)| \ge \gamma(\log\log h^{-1}/\log h^{-1})^{2/3} \quad \text{i.o.}\right\} = 0,$$

且对每一 $f \in \mathcal{K}$, 有

$$\lim_{h\to 0} \inf_{0\le t\le 1-h} \sup_{0\le x\le 1} |M_{t,h}(x) - f(x)| \log h^{-1} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4\sqrt{1-I(f)}}, & I(f) < 1, \\ \infty, & I(f) = 1, \end{cases} \quad \text{a.s.}$$

定理 W.2 设 a_T 如定理 R 所定义. 那么对充分大的 $\gamma > 0$, 有

$$P\left\{ \sup_{0\le t\le T-a_T} \inf_{f\in\mathcal{K}} \sup_{0\le x\le 1} |Y_{t,T}(x) - f(x)| \ge \gamma\Big((\log g(T))/g(T)\Big)^{2/3} \quad \text{i.o.}\right\} = 0,$$

其中 $g(T) = \log(T/a_T) + \log\log T$, 且对每一 $f \in \mathcal{K}$, 有

$$\liminf_{T\to\infty} \inf_{0\le t\le T-a_T} \sup_{0\le x\le 1} |Y_{t,T}(x) - f(x)|g(T) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4\sqrt{1-I(f)}}, & I(f) < 1, \\ \infty, & I(f) = 1, \end{cases} \quad \text{a.s.}$$

若 a_T 还满足定理 R 中的条件 (iii), 那么上式中的 lim inf 可换成 lim.

Wei, Q.C. (危启才) 讨论了 Hölder 范数下的与定理 R 和 S 类似的结论, 还讨论了 l^p 值 Wiener 过程的同类定理.

4.1.2 Gauss 过程的 Erdös-Révész 重对数律

设 $\{W(t); t\ge 0\}$ 是标准 Wiener 过程, 定义

$$\eta(t) = \sup\{s : 0 \le s \le t, W(s) \ge (2s\log\log s)^{1/2}\}, \quad t \ge 0,$$

$$\eta_\delta(t) = \sup\{s : 0 \le s \le t, W(s) \ge (2(1-\delta)s\log\log s)^{1/2}\},\ t \ge 0,\ 0 \le \delta < 1,$$

$$\eta_\delta^{(p)}(t) = \sup\{s : 0 \le s \le t, W(s) \ge s^{1/2}\alpha(\delta,p,s)\}, \quad t \ge 0,$$

其中

$$\alpha(\delta,p,s) = \left(2\Big(\log_2 s + \frac{3}{2}\log_3 s + \sum_{j=4}^{p}\log_j s - \delta\log_p s\Big)\right)^{1/2}, \ \delta \ge 0,$$

$p = 3, 4, \cdots, \log_j x = \log_1(\log_{j-1} x), \log_1 x = \ln x \ (x > 0)$ 或 $1\ (x \le 0)$. 这里及本节以后均记 $\log x = \ln x$. 由重对数律显然

有

$$\lim_{t\to\infty}\eta(t)=\lim_{t\to\infty}\eta_\delta(t)=\lim_{t\to\infty}\eta_\delta^{(p)}(t)=\infty\quad\text{a.s.}$$

和

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\eta(t)}{t}=\limsup_{t\to\infty}\frac{\eta_\delta(t)}{t}=\limsup_{t\to\infty}\frac{\eta_\delta^{(p)}(t)}{t}=1\quad\text{a.s.}$$

Erdös 和 Révész (1990) 考察了 $\eta(t)$ 的下界，得到一个新的重对数律：对某常数 C_0, $1/4\le C_0\le 2^{14}$,

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{(\log_2 t)^{1/2}}{\log_3 t\cdot\log t}\cdot\log\frac{\eta(t)}{t}=-C_0\quad\text{a.s.}$$

Shao (1994) 求得了 C_0 的精确值和 $\eta_\delta(t)$ 与 $\eta_\delta^{(p)}(t)$ 的精确下界.

定理 4.1.5 对每一 $0<\delta\le 1/2$, 我们有

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{(\log_2 t)^{1/2}}{\log_3 t\cdot\log t}\cdot\log\frac{\eta(t)}{t}=-3\sqrt{\pi}\quad\text{a.s.},$$

$$\liminf_{t\to\infty}(\log t)^{\delta-1}(\log_2 t)^{-1/2}\cdot\log\frac{\eta_\delta(t)}{t}=-2\delta\sqrt{\pi/(1-\delta)}\quad\text{a.s.}$$

定理 4.1.6 对 $p=3,4\cdots$, 我们有

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{\log_p\eta_0^{(p)}(t)-\log_p t}{\log_{p+1}t}=-2\sqrt{\pi}\quad\text{a.s.},$$

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{\log_{p-1}\eta_\delta^{(p)}(t)-\log_{p-1}t}{\log_{p+1}t}=-2\delta\sqrt{\pi}\quad\text{a.s.},\quad 0<\delta<1,$$

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{\log_{p-2}\eta_\delta^{(p)}(t)-\log_{p-2}t}{\log_{p-2}t\cdot(\log_{p-1}t)^{1-\delta}\log_p t}=-2\delta\sqrt{\pi}\quad\text{a.s.},\quad \delta>1.$$

注 4.1.1 定理 4.1.5 是说，对任何充分大的 t, 在

$$t^{1-3\sqrt{\pi}\log_3 t\cdot(\log_2 t)^{-1/2}}\quad 和\quad t$$

之间存在着 s 使得 $W(s) \geq (2s\log\log s)^{1/2}$. 定理 4.1.6 有类似的意义.

令

$$\bar{\eta}(t) = \sup\{s : 1 \leq s \leq t, W(s) \geq (2s\log\log s)^{1/2}\}, \quad \text{当 } t \geq 1,$$
$$\hat{\eta}(t) = \sup\left\{s : 0 \leq s \leq t, \frac{W(e^s)}{e^{s/2}} \geq (2\log s)^{1/2}\right\}, \quad \text{当 } t \geq 0.$$

易见对每一 $t > 0$

$$\hat{\eta}(t) = \log \bar{\eta}(e^t) \quad \text{a.s.}$$

因此, 由定理 4.1.5 我们有

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{(\log t)^{1/2}}{t \cdot \log_2 t} \cdot (\hat{\eta}(t) - t) = -3\sqrt{\pi} \quad \text{a.s.}$$

显然, $\{W(e^s)/e^{s/2}; s \geq 0\}$ 是 O-U 过程, 它是一个平稳 Gauss 过程. 由此导致去研究一般平稳的 Gauss 过程 $\hat{\eta}(t)$ 的相应问题.

设 $\{X(t); t \geq 0\}$ 是可分平稳 Gauss 过程, $EX(t) = 0$, $EX^2(t) = 1$. 记它的协方差函数

$$r(t) = EX(t+s)X(s), \quad s \geq 0,\ t \geq 0.$$

考察随机过程

$$\xi(t) = \sup\{s : 0 \leq s \leq t, X(s) \geq (2\log s)^{1/2}\}, \quad t \geq 0.$$

在关于 $r(t)$ 的某些条件下, 由重对数律的上类可推得 (参见 Qualls 和 Watanabe 1971)

$$P\{X(s) \geq (2\log s)^{1/2}, \text{i.o.}\} = 1.$$

因此我们有

$$\lim_{t\to\infty} \xi(t) = \infty \quad \text{a.s.}$$

和

$$\limsup_{t\to\infty} (\xi(t) - t) = 0 \quad \text{a.s.}$$

Shao (1992) 对平稳 Gauss 过程 $X(t)$ 得到如下的 Erdös-Révész 重对数律:

定理 4.1.7 假设下述条件被满足:

对某 $C>0, 0<\alpha<2$, 当 $t\to 0$时, $r(t)=1-C|t|^\alpha+o(|t|^\alpha)$,

对某 $\gamma>0$, 当$t\to\infty$ 时, $r(t)=O(t^{-2\gamma})$,

对每一 $s>0, \sup\limits_{t\geq s}|r(t)|<1$.

那么

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{\xi(t)-t}{t(\log t)^{(\alpha-2)/(2\alpha)}\cdot\log_2 t}=-\frac{(2+\alpha)\sqrt{\pi}}{\alpha H_\alpha(2C)^{1/\alpha}}\quad \text{a.s.}, 0<\alpha<2, \tag{4.1.12}$$

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{\log(\xi(t)/t)}{\log_2 t}=-\frac{2\sqrt{\pi}}{H_2\sqrt{2C}}\quad \text{a.s.}, \alpha=2, \tag{4.1.13}$$

其中 $0<H_\alpha:=\lim_{T\to\infty}T^{-1}\int_0^\infty e^s P\{\sup_{0\leq t\leq T}Y(t)>s\}ds<\infty$, $Y(t)$ 是非平稳 Gauss 过程, $EY(t)=-|t|^\alpha$, $Cov(Y(s),Y(t))=-|t-s|^\alpha+|s|^\alpha+|t|^\alpha$.

下面, 我们应用定理4.1.7于两个特殊的Gauss过程: 独立O-U过程的无穷级数和分数 Wiener 过程 (见 Shao 1992). 设 $Y(t)=(X_1(t),X_2(t),\cdots)$, 其中 $\{X_i(t);-\infty<t<\infty\}(i=1,2,\cdots)$ 是独立的 O-U 过程, 具有系数 γ_i 和 λ_i. 假设

$$0<\Gamma_0^2=\sum_{i=1}^\infty\frac{\gamma_i}{\lambda_i}<\infty.$$

定义

$$X(t)=\frac{1}{\Gamma_0}\sum_{i=1}^\infty X_i(t), \tag{4.1.14}$$

$$\sigma^2(t)=\frac{1}{\Gamma_0^2}\sum_{i=1}^\infty\frac{\gamma_i}{\lambda_i}(1-e^{-\lambda_i t}),\quad t\geq 0. \tag{4.1.15}$$

众所周知 $\{X(t);t\geq 0\}$ 是平稳 Gauss 过程, $EX(t)=0, EX^2(t)=1$ 且协方差函数

$$r(t)=EX(t+s)X(s)=1-\sigma^2(t)\quad s,t\geq 0.$$

定理 4.1.8 设 $\{X(t);t\geq 0\}$ 如 (4.1.14) 所定义. 令

$$\xi(t)=\sup\{s;0\leq s\leq t, X(s)\geq (2\log s)^{1/2}\},\quad t\geq 0.$$

设 $\sigma^2(t)$ 如 (4.1.15). 假设存在 $0<\alpha\leq 1, C>0$ 和 $\delta>0$ 使得

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\gamma_i}{\min(\lambda_i,\lambda_i^{1+\delta})}<\infty, \tag{4.1.16}$$

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{\sigma^2(t)}{t^\alpha}=C. \tag{4.1.17}$$

则 (4.1.12) 成立.

设 $\{Z(t);t\geq 0\}$ 是 α 阶的分数 Wiener 过程. 考察

$$\eta(t)=\sup\{s;0\leq s\leq t, Z(s)\geq (2s^{2\alpha}\log\log s)^{1/2}\},\quad t\geq 0.$$

由 $Z(t)$ 的增量的上类 (参见 Grill, 1991), 我们有

$$\lim_{t\to\infty}\eta(t)=\infty\quad \text{a.s.}$$

和

$$\limsup_{t\to\infty}(\eta(t)-t)=0\quad \text{a.s.}$$

下述定理给出了 $\eta(\cdot)$ 的下界.

定理 4.1.9 我们有

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{(\log\log t)^{(1-\alpha)/(2\alpha)}\cdot\log(\eta(t)/t)}{\log t\cdot\log\log\log t}=-\frac{(1+\alpha)\sqrt{\pi}}{\alpha H_{2\alpha}}\quad \text{a.s.}$$

§4.2 Gauss 过程的小球概率和 Chung 重对数律

在建立 Chung 重对数律的过程中，小球概率估计是一个关键. 在本节中，我们首先讨论 Gauss 过程的小球概率，然后应用它来获得 Gauss 过程的 Chung 重对数律，特别地，我们估计了分

数 Wiener 过程和 O-U 过程无穷级数的小球概率的界并给出了它们的 Chung 重对数律.

4.2.1 Gauss 过程的小球概率

Shao (1993) 及 Monrad 和 Rootzen (1995) 分别独立地对具有平稳增量的 Gauss 过程建立了小球概率. 在此我们介绍 Shao 的结果, 其结论带有较精确的常数.

定理 4.2.1 设 $\{X(t);0 \le t \le 1\}$ 是具有平稳增量的 Gauss 过程, $EX(t)=0, X(0)=0$ a.s. 若

$$\sigma^2(h)=E(X(t+h)-X(t))^2, \quad 0 \le t \le t+h \le 1, \tag{4.2.1}$$

在 $(0,1)$ 上是非降的凹函数, 那么对每一 $0<x<1$ 有

$$P\left\{\sup_{0\le t\le 1}|X(t)| \le \sigma(x)\right\} \le 2\exp(-0.17/x) \tag{4.2.2}$$

和

$$P\left\{\sup_{0\le t\le 1}|X(t)| \le \sigma(x)+6e\int_0^{\infty}\sigma(xe^{-y^2})dy\right\} \ge \exp(-1.87/x). \tag{4.2.3}$$

特别地, 若 $\sigma^2(x)$ 是凹函数, 且对某 $\alpha>0$, $\sigma(x)/x^{\alpha}$ 在 $(0,1)$ 上是非降的, 则

$$P\left\{\sup_{0\le t\le 1}|X(t)| \le c_\alpha\sigma(x)\right\} \ge \exp(-1.87/x), \tag{4.2.4}$$

其中 $c_\alpha = 1+3e\sqrt{\pi/\alpha}$.

证明 利用推论 1.2.6 和 $\log(2\Phi(\sqrt{2})-1) \le -0.17$, 我们有

$$\begin{aligned} P\left\{\sup_{0\le t\le 1}|X(t)| \le \sigma(x)\right\} &\le P\left\{\max_{0\le i\le 1/x}|X(ix)| \le \sigma(x)\right\} \\ &\le \prod_{i=1}^{[1/x]}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{2}} e^{-t^2/2}dt \\ &= (2\Phi(\sqrt{2})-1)^{[1/x]} \\ &\le 2\exp(-0.17/x). \end{aligned}$$

这就证明了 (4.2.2). 由 $\sigma^2(x)$ 凹性, 易知 $\sigma^2(kx) \le k\sigma^2(x)$, $k = 1, 2, \cdots$. 从而除了指数中的常数因子外, (4.2.4) 是下节定理 4.3.1 的特例. 故 (4.2.3) 和 (4.2.4) 的证明从略.

推论 4.2.1 设 $\{Z(t); 0 \le t \le 1\}$ 是阶为 $0 < \alpha < 1/2$ 的分数 Wiener 过程. 那么对每一 $0 < x < 1$ 我们有

$$\exp\Big(-\theta_\alpha x^{-1/\alpha}\Big) \le P\Big\{\sup_{0\le t\le 1} |Z(t)| \le x\Big\} \le 2\exp\Big(-0.17x^{-1/\alpha}\Big), \tag{4.2.5}$$

其中 $\theta_\alpha = 2(1 + 3e\sqrt{\pi/\alpha})^{1/\alpha}$.

注 4.2.1 Monrad 和 Rootzen (1995) 证明了对 α 的所有情形有类似于 (4.2.5) 的不等式成立, 即对阶为 $0 < \alpha < 1$ 的分数 Wiener 过程, 存在与 x 无关的常数 $0 < c \le C < \infty$ 使得

$$\exp\Big(-Cx^{-1/\alpha}\Big) \le P\Big\{\sup_{0\le t\le 1} |Z(t)| \le x\Big\} \le \exp\Big(-cx^{-1/\alpha}\Big). \tag{4.2.6}$$

参见下节的定理 4.3.3.

4.2.2 分数 Wiener 过程的 Chung 重对数律

利用分数 Wiener 过程的小球概率估计, 即 (4.2.6), Monrad 和 Rootzen (1995) 对这类过程建立了如下的 Chung 重对数律.

定理 4.2.2 设 $\{Z(t); t \ge 0\}$ 是阶为 $0 < \alpha < 1$ 的分数 Wiener 过程. 那么存在正常数 c_α, $c_\alpha{}'$ 使得

$$\liminf_{t\to 0} \sup_{0\le s\le t} \frac{|Z(s)|}{t^\alpha(\log\log t^{-1})^{-\alpha}} = c_\alpha \quad \text{a.s.}, \tag{4.2.7}$$

$$\liminf_{t\to\infty} \sup_{0\le s\le t} \frac{|Z(s)|}{t^\alpha(\log\log t)^{-\alpha}} = c_\alpha{}' \quad \text{a.s.} \tag{4.2.8}$$

定理 4.2.2 的证明将在下节给出.

注 4.2.2 Monrad 和 Rootzen (1995) 对更大的一类 Gauss 过程证明了 Chung 重对数律. 设 $\{X(t); -\infty < t < \infty\}$ 是中心化的

具有平稳增量的实连续 Gauss 过程. 假设 $X(0)=0$ 且有连续的协方差函数

$$R(s,t)=\int_{-\infty}^{\infty}(e^{is\lambda}-1)(e^{it\lambda}-1)\Delta(d\lambda),$$

其中对称谱测度 Δ 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\Delta(d\lambda)<\infty.$$

定理 4.2.3 若

$$\sigma^2(h)=\mathrm{Var}(X(t+h)-X(t))\le c_1h^{2\alpha},\quad 0\le h\le\delta,\ 0\le t\le\delta-h,$$
$$\mathrm{Var}(X(t+h)|X(s),0\le s\le t)\ge c_2h^{2\alpha},\quad 0\le h\le\delta,\ 0\le t\le\delta-h,$$

且对某 $l>0$

$$\liminf_{|\lambda|\to0}|\lambda|^3\Delta([\lambda,\lambda+l])>0,$$

则存在正常数 c_0 使得

$$\liminf_{t\downarrow0}\frac{M(t)}{t^\alpha(\log\log t)^{-\alpha}}=c_0\qquad \text{a.s.}$$

注 4.2.3 Li 和 Shao (1999) 的定理 6.9 指出 (参见 Li 和 Linde 1998, Shao 1999): 对阶为 α $(0<\alpha<1)$ 的分数 Wiener 过程 $\{Z(t);t\ge0\}$ 有精确的小球概率估计, 即存在常数 C_α 使得

$$\lim_{x\to0}x\log P\Big(\sup_{0\le t\le1}|Z(t)|\le x^\alpha\Big)=-C_\alpha.$$

从而有如下重对数律

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{\sup_{0\le s\le t}|Z(s)|}{t^\alpha(\log\log t)^{-\alpha}}=C_\alpha\qquad \text{a.s.},$$

$$\liminf_{t\to0}\frac{\sup_{0\le s\le t}|Z(s)|}{t^\alpha(\log\log(1/t))^{-\alpha}}=C_\alpha\qquad \text{a.s.}$$

4.2.3 O-U 过程的无穷级数的 Chung 重对数律

设 $\{Y(t); -\infty < t < \infty\} = \{X_k(t); -\infty < t < \infty\}_{k=1}^{\infty}$ 是具有系数 γ_k 和 λ_k 的独立 O-U 过程,

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(t), \qquad -\infty < t < \infty, \tag{4.2.9}$$

为 $Y(\cdot)$ 的无穷级数.

Shao 和 Wang (1995) 对 $\{X(t)\}$ 证明了 Chung 重对数律.

定理 4.2.4 假设

$$0 < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\lambda_k} < \infty \tag{4.2.10}$$

且对某 $\alpha > 0$, $\sigma(h)/h^{\alpha}$ 在 $[0,1]$ 上是非降的, 其中

$$\sigma^2(h) = E(X(h) - X(0))^2 = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\lambda_k}(1 - e^{-\lambda_k h}). \tag{4.2.11}$$

那么对某 $0 < C < \infty$

$$\liminf_{h\to 0} \sup_{0\le t\le h} \frac{|X(t)|}{\sigma(Ch/\log\log(1/h))} = 1 \qquad \text{a.s.}$$

定理 4.2.4 的证明是基于小球概率估计, 它将作为定理 4.3.5 的推论在 4.3.3 小节中给出.

Zhang (1995) 对 $X(\cdot)$ 给出了如下的 Chung 型重对数律.

定理 4.2.5 假设 (4.2.10) 被满足且

$$\Gamma_1 = 2\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k < \infty, \tag{4.2.12}$$

则

$$\liminf_{h\to 0}\sup_{0\le s\le h}\Big(\frac{8\log\log h^{-1}}{\pi^2\Gamma_1 h}\Big)^{1/2}|X(s)-X(0)|=1\quad \text{a.s.}\qquad (4.2.13)$$

它的证明从下节的定理 4.3.5 和下述引理即得.

引理 4.2.1 设 $\{W(t);t\ge 0\}$ 是标准 Wiener 过程, 若 (4.2.13) 被满足, 则对任给的 $\delta>0$, 存在充分小的 $h_0=h_0(\delta)$ 使得对任一 $x>0$, $0<h<h_0$ 有

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\pi}\exp\Big(-\frac{\pi^2}{8(1-\delta)x^2}\Big)\le P\Big\{\sup_{0\le t\le 1}|W(t)|\le x\sqrt{1-\delta}\Big\}\\
&\le P\Big\{\sup_{0\le t\le h}|X(t)-X(0)|\le x(\Gamma_1 h)^{1/2}\Big\}\\
&\le P\Big\{\sup_{0\le t\le 1}|W(t)|\le x\sqrt{1+\delta}\Big\}\\
&\le \frac{4}{\pi}\exp\Big(-\frac{\pi^2}{8(1+\delta)x^2}\Big).
\end{aligned}\qquad (4.2.14)$$

证明 易见对任何 $x_1\le x_2\le x_3\le x_4$,

$$E(X(x_4)-X(x_3))((X(x_2)-X(x_1))\le 0,$$

且对所有 $0\le t\le t+s\le T$,

$$\begin{aligned}
&-E\Big(X(T)-X(t+s)\Big)\Big(X(t+s)-X(t)\Big)\\
&-E\Big(X(t+s)-X(t)\Big)\Big(X(t)-X(0)\Big)\\
=&\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{\lambda_k}\Big(1-\exp(-\lambda_k s)\Big)\Big(2-\exp(-\lambda_k(T-t-s))-\exp(-\lambda_k t)\Big)\\
\le& 2s\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\Big(1-\exp\Big(-\lambda_k\frac{T}{2}\Big)\Big)=:s\cdot H(T),
\end{aligned}$$

其中

$$H(T)=2\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\Big(1-\exp\Big(-\lambda_k\frac{T}{2}\Big)\Big)\to 0\quad (T\to 0).$$

对任意固定的 $\delta>0$, 选充分小的 $\varepsilon>0$. 对任意固定的正整数 n, 对 $i=1,2,\cdots,n$, 令

$$\begin{aligned}
\xi_i &= X\Big(\frac{i}{n}h\Big)-X\Big(\frac{i-1}{n}h\Big),\\
\eta_i &= W\Big(\Gamma_1(1+\varepsilon)\frac{i}{n}h\Big)-W\Big(\Gamma_1(1+\varepsilon)\frac{i-1}{n}h\Big),\\
\eta_i^* &= W\Big(\Gamma_1(1-\varepsilon)\frac{i}{n}h\Big)-W\Big(\Gamma_1(1-\varepsilon)\frac{i-1}{n}h\Big).
\end{aligned}$$

设 $\Sigma_\xi,\Sigma_\eta,\Sigma_{\eta^*}$ 分别是 $(\xi_1,\cdots,\xi_n)'$, $(\eta_1,\cdots,\eta_n)',(\xi_1^*,\cdots,\xi_n^*)'$ 的协方差矩阵. 那么我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1 i\neq j}^{n}E\xi_i\xi_j &= E\Big(X(h)-X\Big(\frac{i}{n}h\Big)\Big)\Big(X\Big(\frac{i}{n}h\Big)-X\Big(\frac{i-1}{n}h\Big)\Big)\\
&\quad +E\Big(X\Big(\frac{i}{n}h\Big)-X\Big(\frac{i-1}{n}h\Big)\Big)\Big(X\Big(\frac{i-1}{n}h\Big)-X(0)\Big)\\
&\geq -\frac{1}{n}hH(h).
\end{aligned}$$

由于 $E\xi_i\xi_j\leq 0(i\neq j)$, 我们有

$$\rho_i:=\sum_{j=1 i\neq j}^{n}|E\xi_i\xi_j|=\Big|\sum_{j=1 i\neq j}^{n}E\xi_i\xi_j\Big|\leq\frac{1}{n}hH(h).$$

注意到 $H(h)\to 0,\sigma^2(h)/h\to\Gamma_1(h\to 0)$. 故存在充分小的 h_0 使得对 $0<h\leq h_0$,

$$(1+\varepsilon)\Gamma_1\frac{h}{n}-\sigma^2\Big(\frac{h}{n}\Big)-\rho_i>0,\ \sigma^2\Big(\frac{h}{n}\Big)-(1-\varepsilon)\Gamma_1\frac{h}{n}-\rho_i>0.$$

因此, $\Sigma_\eta-\Sigma_\xi$ 和 $\Sigma_\xi-\Sigma_{\eta^*}$ 是两个具有正的主对角元的矩阵, 且每一行中所有非对角元的绝对值和小于或等于该行的对角元, 从

而 $\Sigma_\eta - \Sigma_\xi, \Sigma_\xi - \Sigma_{\eta^*}$ 是半正定的. 由推论 1.2.4 (Anderson 不等式) 即得

$$P\left\{\max_{1\le i\le n}\left|\sum_{j=1}^{i}\eta_j\right| \le x\left(\Gamma_1 h\right)^{1/2}\right\} \le P\left\{\max_{1\le i\le n}\left|\sum_{j=1}^{i}\xi_j\right| \le x\left(\Gamma_1 h\right)^{1/2}\right\}$$
$$\le P\left\{\max_{1\le i\le n}\left|\sum_{j=1}^{i}\eta_j^*\right| \le x\left(\Gamma_1 h\right)^{1/2}\right\},$$

即

$$P\left\{\max_{1\le i\le n}\left|W\left((1+\varepsilon)\Gamma_1\frac{i}{n}h\right)\right| \le x(\Gamma_1 h)^{1/2}\right\}$$
$$\le P\left\{\max_{1\le i\le n}\left|X\left(\frac{i}{n}h\right) - X(0)\right| \le x(\Gamma_1 h)^{1/2}\right\}$$
$$\le P\left\{\max_{1\le i\le n}\left|W\left((1-\varepsilon)\Gamma_1\frac{i}{n}h\right)\right| \le x(\Gamma_1 h)^{1/2}\right\}.$$

令 $n = 2^m \to \infty$ $(m \to \infty)$, 即得 (4.2.14) 成立.

注 4.2.4 从引理 4.2.1 的证明我们可看到, 若 $\{\xi(t); 0 \le t \le T\}$ 是零均值 a.s. 连续的 Gauss 过程, 满足

(a) 对所有 $0 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4 \le T$,

$$E(\xi(x_4) - \xi(x_3))(\xi(x_2) - \xi(x_1)) \le 0$$

或

$$E(\xi(x_4) - \xi(x_3))(\xi(x_2) - \xi(x_1)) \ge 0;$$

(b) 对某 $0 < A < \infty$ 和所有 $0 \le t \le t+s \le T$

$$E(\xi(t+s) - \xi(t))^2 \le As;$$

(c) 对所有 $x \in [0,T]$ 和任意整数 $m, 1 \le i \le m$,

$$|E(\xi(x) - \xi(ix/m))(\xi(ix/m) - \xi((i-1)x/m))$$
$$+ E(\xi(ix/m) - \xi((i-1)x/m))(\xi((i-1)x/m) - \xi(0))|$$
$$\le f(x)x/m,$$

其中 $f(x)$ 是 $(0,\infty)$ 上的实函数， $f(x)\to 0(x\to 0)$. 那么对任一 $\varepsilon>0$, 存在充分小的 h_0, 使得对任一 $y>0$, $0<h\le h_0$ 有

$$P\left\{\sup_{0\le t\le h}|\xi(t)-\xi(0)|\le y(As)^{1/2}\right\}$$
$$\ge P\left\{\sup_{0\le t\le 1}|W(t)|\le y\sqrt{1-\varepsilon}\right\}\ge\frac{2}{\pi}\exp\Big(-\frac{\pi^2}{8(1-\varepsilon)y^2}\Big).$$

注 4.2.5 在 Kuelbs, Li 和 Shao (1995) 中，对具有平稳增量的 Gauss 过程，当小球由各种 Hölder 范数给定时，估计了小球概率. 作为应用，他们在 Hölder 范数下对分数 Wiener 过程建立了 Chung 型泛函重对数律. 在 Li 和 Shao (1995) 中，在 Sobolev 范数下，对某些较一般的 Gauss 过程，特别地对分数 Wiener 过程给出了精细的小球估计，建立了运用大偏差技术估计小球概率的新方法. 作为应用，他们给出了分数 Wiener 过程的 Chung 重对数律.

§4.3 Gauss 场的小球概率和 Chung 重对数律

Shao 和 Wang (1995) 给出了 d 参数 Gauss 场的小球概率的下界估计，其中对分数 Lévy-Wiener 场求得了严格的上下界，Wiener 单的小球概率的精确上界和下界被 Talagrand (1994) 所给出. 这些估计被用来研究 Chung 重对数律.

4.3.1 Gauss 场的小球概率

设 $d\ge 1,\mathbf{X}=\{X(\mathbf{t});\mathbf{t}\in R^d\}$ 是实 Gauss 场，均值为零，且 $a\le\mathbf{t}\le b$ 是指对每一个 $i=1,2,\cdots,d$, $a\le t_i\le b$. 在本节中，对 $\mathbf{t}=(t_1,\cdots,t_d)\in R^d,\|\mathbf{t}\|$ 记它的 Euclidean 范数. Shao 和 Wang (1995) 给出了 Gauss 场的小球概率的下界.

定理 4.3.1 假设存在 $[0,1]$ 上的非降函数 $\sigma(x)$ 使得对每一 $\mathbf{s},\mathbf{t}\in[0,1]^d$

$$E|X(\mathbf{t})-X(\mathbf{s})|^2\le\sigma^2(\|\mathbf{t}-\mathbf{s}\|). \tag{4.3.1}$$

又设对某 $\alpha > 0$, $\sigma(x)/x^{\alpha}$ 在 $[0,1]$ 上是非降的, 且对每一 $0 \le h \le 1$ 和整数 k, $1 \le k \le 1/h$, 满足

$$\sigma(kh) \le k^2 \sigma(h). \tag{4.3.2}$$

那么存在正常数 $c = c(\alpha, d)$, 使得对任一 $0 < x < 1$ 有

$$P\left\{ \sup_{\mathbf{0} \le \mathbf{t} \le \mathbf{1}} |X(\mathbf{t})| \le c\sigma(x) \right\} \ge \exp\left(-\frac{c}{x^d}\right). \tag{4.3.3}$$

令

$$\mathcal{A} = \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}]; \mathbf{a}, \mathbf{b} \in [0, \mathbf{1}]^d,\ \mathbf{a} \le \mathbf{b}\}.$$

对任一 $A \in \mathcal{A}$, 记 $|A|$ 为 R^d 中 A 的 Lebesgue 测度, 并形式地定义

$$X(A) = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} dX(\mathbf{t}),$$

其中 $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$ 也可理解为 $\mathbf{X}$ 的差分算子.

定理 4.3.2 假设存在 $[0,1]$ 上非降函数 $\sigma(x)$ 使对任何 $A \in \mathcal{A}$ 有

$$E(X(A))^2 \le \sigma^2(|A|). \tag{4.3.4}$$

又设对某 $\alpha > 0$, $\sigma(x)/x^{\alpha}$ 是 $[0,1]$ 上的非降函数且满足 (4.3.2). 那么存在仅依赖于 α 和 d 的正常数 c 使得对任何 $0 < x < 1/2$ 有

$$P\left\{ \sup_{\mathbf{0} \le \mathbf{t} \le \mathbf{1}} |X(\mathbf{t})| \le c\left(\log\frac{1}{x}\right)^{d-1} \sigma(x) \right\} \overset{KS}{\ge} \exp\left(-\frac{c(\log(1/x))^{d-1}}{x}\right). \tag{4.3.5}$$

定理 4.3.1 的证明 对整数 $k \ge 0$ 和 $\mathbf{t} = (t^{(1)}, \cdots, t^{(d)}) \in [0,1]^d$, 记

$$\mathbf{t}_k = \frac{[\mathbf{t}2^k]}{2^k} = \left(\frac{[t^{(1)}2^k]}{2^k}, \cdots, \frac{[t^{(d)}2^k]}{2^k}\right), \tag{4.3.6}$$

$\mathbf{t}_{-1} = \mathbf{0}$. 由条件 (4.3.1) 和 $\sigma(x)/x^{\alpha}$ 的单调性及定理 2.1.3 易知, $\{X(\mathbf{t}); \mathbf{t} \in [0,1]^d\}$ a.s. 连续. 又由条件 (4.3.1) 知 $X(\mathbf{0}) = 0$ a.s., 从

而

$$|X(\mathbf{t})| = \lim_{k\to\infty} |X(\mathbf{t}_k) - X(\mathbf{0})| \le \sum_{k=1}^{\infty} |X(\mathbf{t}_k) - X(\mathbf{t}_{k-1})|.$$

因此

$$\sup_{\mathbf{0}\le\mathbf{t}\le\mathbf{1}} |X(\mathbf{t})| \le \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\mathbf{0}\le\mathbf{t}\le\mathbf{1}} |X(\mathbf{t}_k) - X(\mathbf{t}_{k-1})|, \tag{4.3.7}$$

并且

$$\sup_{\mathbf{0}\le\mathbf{t}\le\mathbf{1}} \|\mathbf{t}_k - \mathbf{t}_{k-1}\| \le \sqrt{d}\, 2^{-k}. \tag{4.3.8}$$

不妨设 $0 < x < 1/d$, 否则结论显然. 令整数 n_0 使得

$$1/x \le 2^{n_0} \le 2/x. \tag{4.3.9}$$

记 $N = N(0,1)$ 为标准正态变量. 定义

$$C := C_\alpha = (1 - 2^{-\alpha/2})/(2d^2), \tag{4.3.10}$$

$$x_k = C\sigma\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-|k-n_0|}\sqrt{d}x\right), \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{4.3.11}$$

因 $\sigma(x)/x^\alpha$ 是非降的, 注意到 (4.3.2) 我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} x_k &\le \frac{(1-2^{-\alpha/2})}{2d^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{-\alpha|k-n_0|} \sigma(\sqrt{d}x) \\
&\le \frac{(1-2^{-\alpha/2})}{d^2} \sigma(\sqrt{d}x) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{-\alpha k} \\
&\le (1-2^{-\alpha/2})\sigma(x) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{-\alpha k} \\
&\le \sigma(x).
\end{aligned} \tag{4.3.12}$$

注意到 $\mathrm{Card}\{\mathbf{t}_k : \mathbf{0} \le \mathbf{t} \le \mathbf{1}\} \le 2^{kd}$, 由定理 1.2.4 及 (4.3.7),(4.3.8),

(4.3.12) 有

$$
\begin{aligned}
&P\Big(\sup_{\mathbf{0}\le\mathbf{t}\le\mathbf{1}}|X(\mathbf{t})|\le\sigma(x)\Big)\\
&\ge P\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{\mathbf{0}\le\mathbf{t}\le\mathbf{1}}|X(\mathbf{t}_k)-X(\mathbf{t}_{k-1})|\le\sigma(x)\right\}\\
&\ge P\left\{\sup_{\mathbf{0}\le\mathbf{t}\le\mathbf{1}}|X(\mathbf{t}_k)-X(\mathbf{t}_{k-1})|\le x_k, k=1,2,\cdots\right\}\\
&\ge\prod_{k\ge1}\left(P\left\{|N|\le\frac{x_k}{\sigma(\sqrt{d}2^{-k})}\right\}\right)^{2^{kd}}\\
&=\prod_{k\ge1}\left(P\left\{|N|\le\frac{C\sigma\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-|k-n_0|}\sqrt{d}x\right)}{\sigma(\sqrt{d}2^{-k})}\right\}\right)^{2^{kd}}\\
&=: I_1\cdot I_2,
\end{aligned}
\tag{4.3.13}
$$

其中

$$
I_1=\prod_{k=1}^{n_0}P\left\{|N|\le\frac{C\sigma((\frac{3}{2})^{k-n_0}\sqrt{d}x)}{\sigma(\sqrt{d}2^{-k})}\right\}^{2^{kd}},
$$

$$
I_2=\prod_{k=n_0+1}^{\infty}P\left\{|N|\le\frac{C\sigma((\frac{3}{2})^{n_0-k}\sqrt{d}x)}{\sigma(\sqrt{d}2^{-k})}\right\}^{2^{kd}}.
$$

注意到

$$
P\{|N|\le t\}\ge t/2,\quad 若\ 0<t\le1, \tag{4.3.14}
$$

$$
P\{|N|\le st\}\ge\exp\Big(-\frac{1}{1-e^{-s^2/2}}e^{-(st)^2/2}\Big),\quad 若\ s>0,t\ge1. \tag{4.3.15}
$$

回顾到 (4.3.9) 及 $\sigma(x)$ 是非降的，我们得

$$
\begin{aligned}
I_1&\ge\prod_{k=1}^{n_0}P\left\{|N|\le C\frac{\sigma((\frac{3}{2})^{k-n_0}\sqrt{d}2^{-n_0})}{\sigma(\sqrt{d}2^{-k})}\right\}^{2^{kd}}\\
&=\prod_{k=1}^{n_0}P\left\{|N|\le C\frac{\sigma(3^{k-n_0}\sqrt{d}2^{-k})}{\sigma(\sqrt{d}2^{-k})}\right\}^{2^{kd}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \prod_{k=1}^{n_0} P\Big\{|N| \leq C3^{2(k-n_0)}\Big\}^{2^{dk}} \qquad (\text{由 } (4.3.2))\\
&\geq \prod_{k=1}^{n_0} \Big(\frac{C}{2}3^{2(k-n_0)}\Big)^{2^{kd}} \qquad (\text{由 } (4.3.14))\\
&= \exp\Big(-\sum_{k=1}^{n_0} 2^{kd}(\log\frac{2}{C} + 2(n_0-k)\log 3)\Big)\\
&\geq \exp\Big(-2^{n_0 d}\sum_{l=0}^{\infty} 2^{-ld}(\log\frac{2}{C} + 2l\log 3)\Big)\\
&= \exp(-2^{n_0 d}D_\alpha) \geq \exp\Big(-2^d D_\alpha/x^d\Big),
\end{aligned}
\tag{4.3.16}
$$

其中 D_α 为仅依赖于 α 和 d 的常数.

现在来估计 I_2. 由于 $2^{-n_0} \leq x \leq 2^{-n_0+1}$ 且 $\sigma(x)/x^\alpha$ 是非降的, 我们有

$$
\begin{aligned}
I_2 &\geq \prod_{k=n_0+1}^{\infty} P\left\{|N| \leq C\frac{\sigma((\frac{3}{2})^{n_0-k}\sqrt{d}x)}{\sigma(2^{-(k-n_0)}\sqrt{d}x)}\right\}^{2^{kd}}\\
&\geq \prod_{k=n_0+1}^{\infty} P\left\{|N| \leq C\Big(\frac{4}{3}\Big)^{(k-n_0)\alpha}\right\}^{2^{kd}}\\
&\geq \prod_{k=n_0+1}^{\infty} \exp\Big(-\frac{2^{kd}}{1-e^{-C^2/2}}\exp\Big(-\frac{C^2}{2}\Big(\frac{4}{3}\Big)^{2(k-n_0)\alpha}\Big)\Big)\\
&\quad (\text{由 } (4.3.15))\\
&= \exp\Big(\frac{-2^{n_0 d}}{1-e^{-C^2/2}}\sum_{k=n_0+1}^{\infty} 2^{(k-n_0)d}\exp\Big(-\frac{C^2}{2}\Big(\frac{4}{3}\Big)^{2(k-n_0)\alpha}\Big)\Big)\\
&= \exp\Big(\frac{-2^{n_0 d}}{1-e^{-C^2/2}}\sum_{l=1}^{\infty} 2^{ld}\exp\Big(-\frac{C^2}{2}\Big(\frac{4}{3}\Big)^{2l\alpha}\Big)\Big)\\
&= \exp(-2^{n_0}D_\alpha) \geq \exp(-2^d D_\alpha/x^d).
\end{aligned}
\tag{4.3.17}
$$

由 (4.3.13), (4.3.16), (4.3.17) 我们得证 (4.3.3) 成立.

注 4.3.1 Talagrand (1993) 证明了如下小球概率估计: 设 $\{Y(\mathbf{t}); \mathbf{t} \in S\}$ 为一实值 Gauss 过程, 其中 $S \subset \mathcal{R}^d$ $(d \geq 1)$ 为

一给定的集合，并赋予距离 $d(\mathbf{s},\mathbf{t}) = \left(E(Y(\mathbf{s}) - Y(\mathbf{t}))^2\right)^{1/2}$. 记 $N_d(S,\epsilon)$ 为以半径为 ϵ 的 d 开球覆盖 S 所需的最小覆盖数. 若存在一函数 $\psi(\epsilon)$ 和一常数 $A>0$, 使得对 $\forall\epsilon>0$, $N_d(S,\epsilon)\le\psi(\epsilon)$ 且 $\psi(\epsilon)/A\le\psi(\epsilon/2)\le A\psi(\epsilon)$, 则存在常数 $C>0$ 使得对任意的 $u\ge 0$, 有

$$P\Big(\sup_{\mathbf{s},\mathbf{t}\in S}|Y(\mathbf{t})-Y(\mathbf{s})|\le u\Big)\ge \exp\Big(-C\psi(u)\Big).$$

定理 4.3.2 的证明 由定理的条件可得 $\sigma(0)=0$, 故若 t_i 之一为零, 就有 $X(\mathbf{t})=0$ a.s. 所以我们可写

$$X(\mathbf{t})=\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{t}} dX(\mathbf{s}).$$

令

$$X_{\mathbf{i},\mathbf{k}}=\int_{(\mathbf{i}-\mathbf{1})/2^{\mathbf{k}}}^{\mathbf{i}/2^{\mathbf{k}}} dX(\mathbf{s}),\quad \mathbf{1}\le\mathbf{i}\le 2^{\mathbf{k}},\mathbf{i},\mathbf{k}\in Z^d.$$

由 (4.3.4) 即得

$$Var(X_{\mathbf{i},\mathbf{k}})\le\sigma^2(2^{-k_1-\cdots-k_d}). \tag{4.3.18}$$

对 $0\le a\le 1$, 记 $a_k=[a2^k]/2^k$, $k=0,1,2,\cdots$. 由定理 2.1.3, X 的样本函数是 a.s. 连续的, 从而对 $\mathbf{0}\le\mathbf{t}=(t^{(1)},\cdots,t^{(d)})<\mathbf{1}$, 有

$$\begin{aligned}
|X(\mathbf{t})| &= \Big|\int_0^{t^{(d)}}\cdots\int_0^{t^{(1)}} dX(\mathbf{s})\Big| = \lim_{\mathbf{k}\to\infty}\Big|\int_0^{t^{(d)}_{k_d}}\cdots\int_0^{t^{(1)}_{k_1}} dX(\mathbf{s})\Big| \\
&= \Big|\sum_{k_d=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_1=1}^{\infty}\int_{t^{(d)}_{k_d-1}}^{t^{(d)}_{k_d}}\cdots\int_{t^{(1)}_{k_1-1}}^{t^{(1)}_{k_1}} dX(\mathbf{s})\Big| \\
&\le \sum_{k_d=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_1=1}^{\infty}\max_{\mathbf{1}\le\mathbf{i}\le 2^{\mathbf{k}}}\Big|\int_{(i_d-1)/2^{k_d}}^{i_d/2^{k_d}}\cdots\int_{(i_1-1)/2^{k_1}}^{i_1/2^{k_1}} dX(\mathbf{s})\Big| \\
&\le \sum_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}<\infty}\max_{\mathbf{1}\le\mathbf{i}\le 2^{\mathbf{k}}}|X_{\mathbf{i},\mathbf{k}}| \quad \text{a.s.}
\end{aligned}$$

因此

$$\sup_{\mathbf{0}\le\mathbf{t}\le\mathbf{1}}|X(\mathbf{t})|\le\sum_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}<\infty}\max_{\mathbf{1}\le\mathbf{i}\le\mathbf{2^k}}|X_{\mathbf{i},\mathbf{k}}|$$

$$\le\sum_{n=d}^{\infty}\sum_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}<\infty,\hat{k}=n}\max_{\mathbf{1}\le\mathbf{i}\le\mathbf{2^k}}|X_{\mathbf{i},\mathbf{k}}|,\qquad(4.3.19)$$

其中 $\hat{k}=k_1+\cdots+k_d$. 设整数 n_0 使得 $1/2^{n_0}\le x\le 2/2^{n_0}$, 且记

$$x_n=\sigma(x(2/3)^{|n-n_0|}),\quad n\ge 1.$$

显然

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}<\infty,\hat{k}=n}x_n\le\sum_{n=1}^{\infty}n^{d-1}\sigma(x(2/3)^{|n-n_0|})$$

$$\le\sum_{n=1}^{\infty}n^{d-1}\sigma(x)(2/3)^{|n-n_0|\alpha}\le cn_0^{d-1}\sigma(x)\le c(\log(1/x))^{d-1}\sigma(x).$$

因此, 由定理 1.2.4 和 (4.3.18)

$$P\left\{\sup_{\mathbf{0}\le\mathbf{t}\le\mathbf{1}}|X(\mathbf{t})|\le c\left(\log\frac{1}{x}\right)^{d-1}\sigma(x)\right\}$$

$$\overset{KS}{\ge}\prod_{n=d}^{\infty}\prod_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}<\infty,\hat{k}=n}\prod_{\mathbf{1}\le\mathbf{i}\le\mathbf{2^k}}P\{|X_{\mathbf{i},\mathbf{k}}|\le x_n\}$$

$$\ge\prod_{n=d}^{\infty}\prod_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}<\infty,\hat{k}=n}\prod_{\mathbf{1}\le\mathbf{i}\le\mathbf{2^k}}P\{|N(0,1)|\le x_n/\sigma(2^{-n})\}$$

$$\ge\prod_{n=d}^{\infty}P\{|N(0,1)|\le x_n/\sigma(2^{-n})\}^{n^{d-1}2^n}=:K_1\cdot K_2,\qquad(4.3.20)$$

其中

$$K_1=\prod_{n=d}^{n_0-1}P\{|N(0,1)|\le\sigma(x(2/3)^{n_0-n})/\sigma(2^{-n})\}^{n^{d-1}2^n},$$

$$K_2=\prod_{n=n_0}^{\infty}P\{|N(0,1)|\le\sigma(x(2/3)^{n-n_0})/\sigma(2^{-n})\}^{n^{d-1}2^n}.$$

由 (4.3.2) 和 (4.3.14), 我们得

$$
\begin{aligned}
K_1 &\geq \prod_{n=d}^{n_0-1} P\{|N(0,1)| \leq \sigma(2^{-n}3^{n-n_0})/\sigma(2^{-n})\}^{n^{d-1}2^n} \\
&\geq \prod_{n=d}^{n_0-1} P\{|N(0,1)| \leq 3^{2(n-n_0)}\}^{n^{d-1}2^n} \\
&\geq \prod_{n=d}^{n_0-1} (0.5\ 3^{n-n_0})^{n^{d-1}2^n} \\
&\geq \exp\left\{-c2^{n_0}\sum_{n=d}^{n_0-1}(n-n_0)n^{d-1}2^{n-n_0}\right\} \\
&\geq \exp\{-cn_0^{d-1}2^{n_0}\} \geq \exp\left\{-\frac{c\log^{d-1}(1/x)}{x}\right\}. \qquad (4.3.21)
\end{aligned}
$$

由 (4.3.15),

$$
\begin{aligned}
K_2 &\geq \prod_{n=n_0}^{\infty} P\{|N(0,1)| \leq \sigma(2^{-n}(4/3)^{n-n_0})/\sigma(2^{-n})\}^{n^{d-1}2^n} \\
&\geq \prod_{n=n_0}^{\infty} P\{|N(0,1)| \leq (4/3)^{(n-n_0)\alpha}\}^{n^{d-1}2^n} \\
&\geq \exp\left\{-3\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{d-1}2^n\exp\left(-(4/3)^{2(n-n_0)\alpha}/2\right)\right\} \\
&\geq \exp\{-cn_0^{d-1}2^{n_0}\} \geq \exp\left\{-\frac{c\log^{d-1}(1/x)}{x}\right\}. \qquad (4.3.22)
\end{aligned}
$$

由 (4.3.20)—(4.3.22) 就证明了 (4.3.5).

现在让我们应用定理 4.3.1 和定理 4.3.2 来获得关于分数 Lévy-Wiener 场和 Wiener 单的小球概率估计. 我们有

定理 4.3.3 设 $d \geq 1, \{Z(\mathbf{t}); \mathbf{t} \in R^d\}$ 是 α 阶 $(0 < \alpha < 1)$ 分数 Lévy-Wiener 场, 即对所有 $\mathbf{s}, \mathbf{t} \geq 0$, $E(Z(\mathbf{s})-Z(\mathbf{t}))^2 = \|\mathbf{s}-\mathbf{t}\|^{2\alpha}$. 那么存在仅依赖于 α 和 d 的常数 $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ 使得对任何

$0 < x < 1$ 有

$$\exp\left(-\frac{c_2}{x^{d/\alpha}}\right) \overset{KS}{\leq} P\left\{\sup_{\mathbf{0}\leq\mathbf{t}\leq\mathbf{1}} |Z(\mathbf{t})| \leq x\right\} \leq \exp\left(-\frac{c_1}{x^{d/\alpha}}\right). \quad (4.3.23)$$

证明 由定理 4.3.1 即得 (4.3.23) 的下界. 下面我们来建立上界. 对 $\mathbf{i} = (i_1, \cdots, i_d) \in Z^d$, 写 $t_{\mathbf{i}} = \mathbf{i}x^{1/\alpha}$. 显然

$$P\left\{\sup_{\mathbf{0}\leq\mathbf{t}\leq\mathbf{1}} |Z(\mathbf{t})| \leq x\right\} \leq P\left\{\max_{\mathbf{1}\leq\mathbf{i}\leq x^{-1/\alpha}} |Z(t_{\mathbf{i}})| \leq x\right\},$$

且对 $\mathbf{1} \leq \mathbf{j} \leq x^{-1/\alpha}$

$$\begin{aligned} P\left\{\max_{\mathbf{1}\leq\mathbf{i}\leq x^{-1/\alpha}} |Z(t_{\mathbf{i}})| \leq x\right\} &= EI\left\{\max_{\mathbf{1}\leq\mathbf{i}\leq x^{-1/\alpha}, \mathbf{i}\neq\mathbf{j}} |Z(t_{\mathbf{i}})| \leq x\right\} \\ &\quad \cdot P\left\{|Z(t_{\mathbf{j}})| \leq x \,\middle|\, Z(t_{\mathbf{i}}), \mathbf{1} \leq \mathbf{i} \leq x^{-1/\alpha}, \mathbf{i} \neq \mathbf{j}\right\}. \end{aligned}$$

借助于 Pitt (1978) 的引理 7.1, 存在一个正常数 $C = C(\alpha, d)$, 使得

$$\begin{aligned} &\mathrm{Var}(Z(t_{\mathbf{j}})|Z(t_{\mathbf{i}}), \mathbf{1} \leq \mathbf{i} \leq x^{-1/\alpha}, \mathbf{i} \neq \mathbf{j}) \\ &\quad \geq \mathrm{Var}(Z(t_{\mathbf{j}})|Z(\mathbf{s}), \|\mathbf{s} - t_{\mathbf{j}}\| \geq x^{1/\alpha}\} = Cx^2. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} &P\left\{|Z(t_{\mathbf{j}})| \leq x \,\middle|\, Z(t_{\mathbf{i}}), \mathbf{1} \leq \mathbf{i} \leq x^{-1/\alpha}, \mathbf{i} \neq \mathbf{j}\right\} \\ &\quad \leq P\left\{|N(0,1)| \leq 1/\sqrt{C}\right\} < 1 \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} &P\left\{\max_{\mathbf{1}\leq\mathbf{i}\leq x^{-1/\alpha}} |Z(t_{\mathbf{i}})| \leq x\right\} \\ &\quad \leq P\{|N(0,1)| \leq 1/\sqrt{C}\} P\left\{\max_{\mathbf{1}\leq\mathbf{i}\leq x^{-1/\alpha}, \mathbf{i}\neq\mathbf{j}} |Z(t_{\mathbf{i}})| \leq x\right\}. \end{aligned}$$

这样, 由递推可得

$$\begin{aligned} &P\left\{\max_{\mathbf{1}\leq\mathbf{i}\leq x^{-1/\alpha}} |Z(t_{\mathbf{i}})| \leq x\right\} \\ &\quad \leq P\{|N(0,1)| \leq 1/\sqrt{C}\}^{(x^{-1/\alpha}-1)^d} \leq \exp(-c/x^{d/\alpha}), \end{aligned}$$

定理 4.3.3 证毕.

推论 4.3.1 设 $\{W(\mathbf{t}); \mathbf{t} \in R^d\}$ 是标准 Wiener 单. 那么

$$P\left\{\sup_{\mathbf{0}\le\mathbf{t}\le\mathbf{1}} |W(\mathbf{t})| \le x\right\} \overset{KS}{\ge} \exp\left(-\frac{c(\log(1/x))^{3(d-1)}}{x^2}\right). \quad (4.3.24)$$

特别地, 若 $d=2$, 则对某常数 $C>0$ 和任何 $0<x<1/2$

$$\exp\left(-\frac{C(\log(1/x))^3}{x^2}\right) \overset{KS}{\le} P\left\{\sup_{\mathbf{0}\le\mathbf{t}\le\mathbf{1}} |W(\mathbf{t})| \le x\right\} \le \exp\left(-\frac{(\log(1/x))^3}{Cx^2}\right). \quad (4.3.25)$$

证明 由定理 4.3.2 即得 (4.3.24) 式. (4.3.25) 式中的上界的证明从略 (参见 Talagrand, 1994).

注 4.3.2 给出在 (4.3.24) 中的下界与 Bass (1988) 中的结果一致. (4.3.25) 是由 Talagrand (1994) 得到的, 它是不可改进的. Shao 和 Wang (1995) 猜测对 $d>2$, (4.3.24) 的下界也是不可改进的.

注 4.3.3 令人惊奇的是: 从定理 4.3.3 和推论 4.3.1 可见, 分数 Lévy-Wiener 场的小球概率与 Wiener 单的小球概率完全不同. 这表示它们的下极限行为也必定十分不同, 我们将在下一小节中看到这一点.

注 4.3.4 Kôno (1976) 给出了某些 Gauss 场的小球概率的上界. 但对具有平稳增量 (即 $E(X(\mathbf{s})-X(\mathbf{t}))^2=\sigma^2(\|\mathbf{s}-\mathbf{t}\|)$) 的一般 Gauss 场尚未获得. 我们猜测若 $\sigma^2(\cdot)$ 在 $(0,1)$ 上是凹函数, 那么 (4.3.3) 中给出的界是不可改进的.

4.3.2 Gauss 场的 Chung 重对数律

设 $d\ge 1$, $\{X(\mathbf{t}); \mathbf{t}\in[0,1]^d\}$ 是中心化的 Gauss 场且在下述意义下具有平稳增量: 即对任何 $\mathbf{0}\le \mathbf{s},\mathbf{t}\le\mathbf{1}$,

$$E|X(\mathbf{s})-X(\mathbf{t})|^2=\sigma^2(\|\mathbf{s}-\mathbf{t}\|), \quad (4.3.26)$$

其中 $\sigma(\cdot)$ 是 [0, 1] 上的非降连续函数. 在此我们来讨论 $\sup_{\mathbf{0}\le\mathbf{t}\le\mathbf{h}}|X(\mathbf{t})|$ 的下极限行为. 利用小球概率的上界, 我们可以较容易地导出下极限的下界. 然而, 从小球概率估计导出下极限的上界却不是那么容易. Shao 和 Wang(1995) 发现利用 Monrad 和 Rootzen (1995) 的方法和定理 4.3.1 可建立一个十分一般的结果.

定理 4.3.4 设 $\{X(\mathbf{t}); \mathbf{t}\in[0,1]^d\}$ 是中心化的具有平稳增量的 Gauss 过程. 假设 $X(\mathbf{0})=0$, 对某 $\beta>0$, $\sigma(x)/x^\beta$ 在 $[0,1]$ 上是非降的, 且存在 $0<\theta<2$, 使对任何 $0<h<1/2$

$$\sigma(2h)\le\theta\sigma(h). \tag{4.3.27}$$

那么存在 $c>0$ 使得

$$\liminf_{h\to0}\frac{\sup_{\mathbf{0}\le\mathbf{t}\le h}|X(\mathbf{t})|}{\sigma(h(c/\log\log(1/h))^{1/d})}\le1\quad\text{a.s.} \tag{4.3.28}$$

定理 4.3.5 设 $\{X(\mathbf{t}); \mathbf{t}\in[0,1]^d\}$ 是满足定理 4.3.4 中的条件的中心化 Gauss 场. 若还存在 $0<c_1\le c_2<\infty$ 使得对某 $0<h_0<1$, 对任何 $0\le x\le h_0h\le h_0^2$ 有

$$\exp\big(-c_2(h/x)^d\big)\le P\Big\{\sup_{\mathbf{0}\le\mathbf{t}\le h}|X(\mathbf{t})|\le\sigma(x)\Big\}\le\exp\big(-c_1(h/x)^d\big), \tag{4.3.29}$$

那么

$$1\le\liminf_{h\to0}\frac{\sup_{\mathbf{0}\le\mathbf{t}\le h}|X(\mathbf{t})|}{\sigma(h(c_1/\log\log(1/h))^{1/d})}\quad\text{a.s.} \tag{4.3.30}$$

且

$$\liminf_{h\to0}\frac{\sup_{\mathbf{0}\le\mathbf{t}\le h}|X(\mathbf{t})|}{\sigma(h(c_2/\log\log(1/h))^{1/d})}\le1\quad\text{a.s.} \tag{4.3.31}$$

特别地, 由定理 4.3.4, 对分数 Lévy-Wiener 场有下述 Chung 重对数律.

定理 4.3.6 设 $\{Z(\mathbf{t}); \mathbf{t} \in [0.1]^d\}$ 是阶为 $\alpha\ (0 < \alpha < 1)$ 的分数 Lévy-Wiener 场. 那么对某 $0 < C < \infty$ 有

$$\liminf_{h\to 0} \frac{(\log\log(1/h))^{\alpha/d}}{h^\alpha} \sup_{\mathbf{0}\le\mathbf{t}\le h} |Z(\mathbf{t})| = C \quad \text{a.s.}$$

定理 4.3.4 的证明 记

$$M(h) = \sup_{\mathbf{0}\le\mathbf{t}\le h} |X(\mathbf{t})|.$$

由 (4.3.27) 即得，存在 $0 < \delta := \delta_{\theta,\beta} \le \beta$ 使得对每一 $0 < h \le 1$ 和整数 k, $1 \le k \le 1/h$ 有

$$\sigma(kh) \le 2k^{1-\delta}\sigma(h). \tag{4.3.32}$$

由 (4.3.26) 和 Minkowski 不等式，对任意的 $1 \le a < 2$ 和 $0 < h < 1/2$, 我们有

$$\sigma(ah) \le \sigma(h) + \sigma((a-1)h) \le (1 + (a-1)^\beta)\sigma(h). \tag{4.3.33}$$

这样，定理 4.3.1 的条件被满足，因此存在 $c_0 > 0$ 使得对任意的 $0 < x \le h \le 1$ 有

$$P\Big\{M(h) \le \sigma(x)\Big\} \ge \exp\Big(-c_0(h/x)^d\Big). \tag{4.3.34}$$

我们来证

$$\liminf_{h\to 0} M(h)/\sigma\big(h(c_0/\log\log(1/h))^{1/d}\big) \le 1 \quad \text{a.s.}$$

对任意的 $0 < \varepsilon < 1$, 令

$$t_k = e^{-k^{1+\varepsilon}}, \quad d_k = e^{k^{1+\varepsilon}+k^\varepsilon}, \quad \sigma_k = \sigma\big(t_k(c_0/\log\log(1/t_k))^{1/d}\big). \tag{4.3.35}$$

只需证明

$$\liminf_{k\to\infty} M(t_k)/\sigma_k \le 1 + \varepsilon^\beta \quad \text{a.s.} \tag{4.3.36}$$

就够了. 为此, 我们利用 X 的谱表示. 下面以 $\mathbf{s}\cdot\mathbf{v}$ 或 $\langle\mathbf{s},\mathbf{v}\rangle$ 记 $\sum_{i=1}^{d} s_i v_i$. 已知 $EX(\mathbf{s})X(\mathbf{t})$ 有形如如下的唯一 Fourier 表示

$$E\{X(\mathbf{s})X(\mathbf{t})\} = \int_{R^d} (e^{i\mathbf{s}\cdot\mathbf{v}}-1)(e^{-i\mathbf{t}\cdot\mathbf{v}}-1)\Delta(d\mathbf{v}) + \langle\mathbf{s}, B\mathbf{t}\rangle. \quad (4.3.37)$$

其中 $B=(b_{ij})$ 是半正定矩阵, $\Delta(\cdot)$ 是 $R^d-\{\mathbf{0}\}$ 上的非负测度, 满足

$$\int_{R^d} \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{1+\|\mathbf{v}\|^2}\Delta(d\mathbf{v}) < \infty.$$

进一步, 存在一中心化的复值 Gauss 随机测度 $W(\cdot)$ 和与 W 独立的 Gauss 随机向量 $\mathbf{Y}$, 使得

$$X(\mathbf{t}) = \int_{R^d} (e^{i\mathbf{t}\cdot\mathbf{v}}-1)W(d\mathbf{v}) + \mathbf{Y}\cdot\mathbf{t}. \quad (4.3.38)$$

测度 W 和 Δ 有关系式 : 对 R^d 中的一切 Borel 集 A 和 B

$$E\{W(A)\overline{W(B)}\} = \Delta(A\cap B).$$

而且

$$W(-A) = \overline{W(A)}.$$

由 (4.3.37), (4.3.26) 式即得

$$\sigma^2(\|\mathbf{t}-\mathbf{s}\|) = 2\int_{R^d}(1-\cos((\mathbf{t}-\mathbf{s})\cdot\mathbf{v}))\Delta(d\mathbf{v}) + \langle\mathbf{t}, B\mathbf{t}\rangle.$$

特别地, 对 $0<h<1$ 和每一 $i=1,\cdots,d$,

$$\sigma^2(h) = 2\int_{R^d}(1-\cos(hv_i))\Delta(d\mathbf{v}) + t_i^2 b_{ii} \geq 2\int_{R^d}(1-\cos(hv_i))\Delta(d\mathbf{v}). \quad (4.3.39)$$

对 $0<h<1$ 和 $1\leq i\leq d$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{R^d,|v_i|\geq 1/h}\Delta(d\mathbf{v}) &\leq \frac{1}{1-\sin 1}\int_{R^d,|v_i|\geq 1/h}\Big(1-\frac{\sin(hv_i)}{hv_i}\Big)\Delta(d\mathbf{v})\\ &= \frac{1}{(1-\sin 1)h}\int_{R^d,|v_i|\geq 1/h}\int_0^h(1-\cos(uv_i))du\Delta(d\mathbf{v})\\ &= \frac{1}{(1-\sin 1)h}\int_0^h\int_{R^d,|v_i|\geq 1/h}(1-\cos(uv_i))\Delta(d\mathbf{v})du\\ &\leq 4\sigma^2(h).\end{aligned}$$

因此

$$\int_{\|\mathbf{v}\|\geq 1/h}\Delta(d\mathbf{v})\leq 4d\sigma^2(dh)\leq 4d^3\sigma(h). \tag{4.3.40}$$

类似地，由 (4.3.39)

$$\begin{aligned}\int_{\|\mathbf{v}\|\leq 1/h}\Delta(d\mathbf{v}) &\leq dh^{-2}\sum_{i=1}^{d}\int_{R^d,|v_i|\leq 1/h}(hv_i)^2\Delta(d\mathbf{v})\\ &\leq 4dh^{-2}\sum_{i=1}^{d}\int_{R^d,|v_i|\leq 1/h}(1-\cos(hv_i))\Delta(d\mathbf{v})\\ &\leq 4d^2h^{-2}\sigma^2(h). \end{aligned}\tag{4.3.41}$$

对 $k=1,2,\cdots$ 和 $\mathbf{0}\leq\mathbf{t}\leq\mathbf{1}$ 定义

$$X_k(\mathbf{t})=\int_{\|\mathbf{v}\|\in(d_{k-1},d_k]}\left(e^{i\mathbf{t}\cdot\mathbf{v}}-1\right)W(d\mathbf{v}),$$

$$\tilde{X}_k(\mathbf{t})=\int_{\|\mathbf{v}\|\notin(d_{k-1},d_k]}\left(e^{i\mathbf{t}\cdot\mathbf{v}}-1\right)W(d\mathbf{v}).$$

显然

$$\begin{aligned}\liminf_{k\to\infty}\frac{M(t_k)}{\sigma_k}\leq&\liminf_{k\to\infty}\frac{\sup_{\mathbf{0}\leq\mathbf{t}\leq t_k}|X_k(\mathbf{t})|}{\sigma_k}\\ &+\liminf_{k\to\infty}\frac{\sup_{\mathbf{0}\leq\mathbf{t}\leq t_k}|\tilde{X}_k(\mathbf{t})|}{\sigma_k}\\ &+d\ \limsup_{k\to\infty}\frac{t_k\|\mathbf{Y}\|}{\sigma_k}. \end{aligned}\tag{4.3.42}$$

由 (4.3.35) 和 (4.3.32) 易知

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty}t_k\|\mathbf{Y}\|/\sigma_k &\leq \|Y\|\limsup_{k\to\infty}t_k\left((\log\log(1/t_k))^{1/d}/(t_kc_0^{1/d})\right)^{1-\delta}\\ &=0\ \text{ a.s.}\end{aligned}\tag{4.3.43}$$

由 Anderson 不等式 (推论 1.2.4)

$$P\left\{\sup_{\mathbf{0}\leq\mathbf{t}\leq t_k}|X_k(\mathbf{t})|\leq(1+\varepsilon^\beta)\sigma_k\right\}\geq P\left\{M(t_k)\leq(1+\varepsilon^\beta)\sigma_k\right\}.$$

因此由 (4.3.33), (4.3.34) 和 (4.3.35) 得

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} P\left\{\sup_{\mathbf{0}\le\mathbf{t}\le t_k} |X_k(\mathbf{t})| \le (1+\varepsilon^{\beta})\sigma_k\right\} \\
&\ge \sum_{k=1}^{\infty} P\left\{M(t_k) \le \sigma\Big(t_k(1+\varepsilon)(c_0/\log\log(1/t_k))^{1/d}\Big)\right\} \\
&\ge \sum_{k=1}^{\infty} \exp\Big\{-(1+\varepsilon)^{-d}\log\log(1/t_k)\Big\} = \infty. \qquad (4.3.44)
\end{aligned}$$

因 $\{\sup_{\mathbf{0}\le\mathbf{t}\le t_k}|X_k(\mathbf{t})|; k\ge 1\}$ 是独立的，由 Borel-Cantelli 引理和 (4.3.44) 即得

$$\liminf_{k\to\infty} \sup_{\mathbf{0}\le\mathbf{t}\le t_k} |X_k(\mathbf{t})|/\sigma_k \le 1+\varepsilon^{\beta} \quad \text{a.s.} \qquad (4.3.45)$$

其次, 我们来估计 (4.3.42) 右边的第二项. 由 (4.3.40),(4.3.41), (4.3.35) 和 (4.3.32), 我们得到对 $\mathbf{0}\le\mathbf{t}\le t_k$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\tilde{X}_k(\mathbf{t})) &= 2\int_{\|\mathbf{v}\|\notin(d_{k-1},d_k]} (1-\cos(\mathbf{t}\cdot\mathbf{v}))\Delta(d\mathbf{v}) \\
&\le \int_{\|\mathbf{v}\|\le d_{k-1}} \|\mathbf{t}\|^2\|\mathbf{v}\|^2\Delta(d\mathbf{v}) + 4\int_{\|\mathbf{v}\|\ge d_k}\Delta(d\mathbf{v}) \\
&\le 4d^3t_k^2d_{k-1}^2\sigma^2(t_k/(t_kd_{k-1})) + d^3\sigma^2(t_k/(t_kd_k)) \\
&\le 4d^3(t_kd_{k-1})^{2\delta}\sigma^2(t_k) + 4d^3(t_kd_k)^{-2\beta}\sigma^2(t_k) \\
&\le 8d^4e^{-\varepsilon k^{\varepsilon}}\sigma^2(t_k).
\end{aligned}$$

所以对任意的 $\mathbf{0}<\mathbf{s},\mathbf{t}\le t_k$, $\|\mathbf{s}-\mathbf{t}\|\le h\le t_k$ 有

$$\mathrm{Var}(\tilde{X}_k(\mathbf{s})-\tilde{X}_k(\mathbf{t})) \le \tilde{\sigma}_k^2(h), \qquad (4.3.46)$$

其中 $\tilde{\sigma}_k^2(h)=\min(\sigma^2(h), 16d^4e^{-\varepsilon k^{\varepsilon}}\sigma^2(t_k))$. 注意到

$$\begin{aligned}
&\int_1^{\infty}\tilde{\sigma}_k(t_ke^{-y^2})dy \le \int_1^{\infty}\min(4d^2e^{-\varepsilon k^{\varepsilon}/2}\sigma(t_k), \sigma(t_ke^{-y^2}))dy \\
&\quad\le \int_1^{\infty}\min(4d^2e^{-\varepsilon k^{\varepsilon}/2}\sigma(t_k), \sigma(t_k)e^{-\beta y^2})dy \le Kke^{-\varepsilon k^{\varepsilon}/2}\sigma(t_k),
\end{aligned}$$

其中 K 是仅依赖于 d 和 β 的常数. 应用 Fernique 不等式 (定理 1.1.3), 对任意的 $\eta > 0$ 得

$$P\left\{\sup_{\mathbf{0}\le\mathbf{t}\le t_k}|\tilde{X}_k(\mathbf{t})| > \eta\sigma_k\right\} \le K\exp\left(-\frac{(\eta\sigma_k)^2}{Kk\exp(-\varepsilon k^{\varepsilon})\sigma(t_k)}\right)$$
$$\le K\exp\left(-\frac{\eta^2(\log\log(1/t_k))^{-2/d}}{Kk\exp(\varepsilon k^{\varepsilon})c_0^2}\right)$$
$$\le K\exp\left(-\frac{\eta^2\exp(\varepsilon k^{\varepsilon})}{Kk^2c_0^2}\right).$$

这样由 Borel-Cantelli 引理

$$\limsup_{k\to\infty}\sup_{\mathbf{0}\le\mathbf{t}\le t_k}|\tilde{X}_k(\mathbf{t})|/\sigma_k = 0 \quad \text{a.s.} \tag{4.3.47}$$

由 (4.3.42), (4.3.43), (4.3.45) 和 (4.3.47) 得证 (4.3.36).

定理 4.3.5 的证明 利用 (4.3.29) 和子序列方法, 易证 (4.3.30). 由定理 4.3.4 的证明可得 (4.3.31).

定理 4.3.6 的证明 由 Pitt 和 Tran (1979) 的 0-1 律知 $Z(\mathbf{t})$ 在 $\mathbf{t}=\mathbf{0}$ 处满足 0-1 律. 从而由定理 4.3.3 和 4.3.5 即得定理的结论.

注 4.3.5 对 $\mathbf{v}\in R^d$ 和 $h>0$, 我们记 $B(\mathbf{v},h)=\{\mathbf{x}\in R^d;\|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|\le h\}$ 是以 $\mathbf{v}$ 为中心, h 为半径的闭球. 设 Δ 为 (4.3.37) 所示的谱测度. 若对某 $h>0$

$$\liminf_{\|\mathbf{v}\|\to\infty}\|\mathbf{v}\|^{d+2}\Delta(B(\mathbf{v},h))>0, \tag{4.3.48}$$

则 $X(\mathbf{t})$ 在 $\mathbf{t}=\mathbf{0}$ 处满足 0-1 律 (见 Pitt 和 Tran 1979). 因此若定理 4.3.5 中的条件和 (4.3.48) 被满足, 则存在常数 c 使得 $c_1\le c\le c_2$ 且

$$\liminf_{h\to 0}\frac{\sup_{\mathbf{0}\le\mathbf{t}\le h}|X(\mathbf{t})|}{\sigma(h(c/\log\log(1/h))^{1/d})}=1 \quad \text{a.s.}$$

4.3.3 应用于分数 Wiener 过程和 O-U 过程无穷级数

设 $Z(t)$ 为阶为 α $(0<\alpha<1)$ 的分数 Wiener 过程，现在我们给出它的 Chung 重对数律的证明.

定理 4.2.2 的证明 (4.2.7) 是定理 4.3.6 的特例. 下证 (4.2.8). 由 (4.2.6) 右边的不等式和子序列方法易证

$$\liminf_{T\to\infty}\Big(\frac{\log\log T}{cT}\Big)^{\alpha}\sup_{0\le t\le T}|Z(t)|\ge 1\quad \text{a.s.} \tag{4.3.49}$$

另一方面，对任意的 $0<\epsilon<1$, 取 $p>1$ 使得 $(1-\epsilon)p<1$. 令 $T_n=e^{n^p}$. 设 $X_n(t)$ 和 $\tilde{X}_n(t)$ 如 (2.2.19) 所定义. 则 $X_n(t)$ 与 $\tilde{X}_n(t)$ 独立, 且 $\{X_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ 相互独立. 由 Anderson 不等式 (见推论 1.2.4) 和 (4.2.6) 左边的不等式得

$$\begin{aligned}
&P\bigg(\Big(\frac{(1-\epsilon)\log\log T_n}{CT_n}\Big)^{\alpha}\sup_{0\le t\le T_n}|X_n(t)|\ge 1\bigg)\\
&\quad\ge P\bigg(\Big(\frac{(1-\epsilon)\log\log T_n}{CT_n}\Big)^{\alpha}\sup_{0\le t\le T_n}|Z(t)|\ge 1\bigg)\\
&\quad\ge(\log T_n)^{-(1-\epsilon)}=n^{-(1-\epsilon)p}.
\end{aligned}$$

从而由 Borel-Cantelli 引理得

$$\liminf_{n\to\infty}\Big(\frac{(1-\epsilon)\log\log T_n}{CT_n}\Big)^{\alpha}\sup_{0\le t\le T_n}|X_n(t)|\le 1\quad \text{a.s.} \tag{4.3.50}$$

另外，与 (2.2.20) 类似可证

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\bigg(\Big(\frac{\log\log T_n}{T_n}\Big)^{\alpha}\sup_{0\le t\le T_n}|\tilde{X}_n(t)|\ge\epsilon\bigg)<\infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理得

$$\liminf_{n\to\infty}P\bigg(\Big(\frac{\log\log T_n}{T_n}\Big)^{\alpha}\sup_{0\le t\le T_n}|\tilde{X}_n(t)|\le\epsilon. \tag{4.3.51}$$

结合 (4.3.50) 和 (4.3.51), 并注意到 $Z(t)=X_n(t)+\tilde{X}_n(t)$ 得

$$\liminf_{T\to\infty}\left(\frac{\log\log T}{CT}\right)^{\alpha}\sup_{0\le t\le T}|Z(t)|\le 1\quad \text{a.s.} \tag{4.3.52}$$

最后，注意到 $\{Z(t);t>0\}$ 和 $\{t^{2\alpha}Z(t^{-1});t>0\}$ 是两个等价的过程，故 $Z(t)$ 在 $t=\infty$ 和 $t=0$ 处都满足 Pitt 和 Tran (1979) 的 0-1 律. 因此，由 (4.3.49) 和 (4.3.52) 得证 (4.2.8).

对 O-U 过程无穷级数 $X(t)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(t)$ 的 Chung 重对数律已被给出于定理 4.2.4 中.

定理 4.2.4 的证明 事实上，从 $0<\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k/\lambda_k<\infty$ 可推得 $X(\cdot)$ 是平稳的 Gauss 过程，且 $\sigma^2(h)$ 在 $(0,\infty)$ 上是凹函数. 设 $f(v)$ 是 (4.3.37) 中 Δ 的谱密度. 易知

$$f(v)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{\lambda_k}\cdot\frac{\lambda_k}{\pi(\lambda_k^2+v^2)}.$$

故 (4.3.48) 成立，从而 $X(\cdot)$ 满足在 $t=0$ 处的 0-1 律. 另一方面，由定理 4.3.1 和定理 4.2.1, (4.3.29) 成立. 因此由定理 4.3.5 就有定理 4.2.4.

§4.4 Gauss 过程增量的下极限

在本节中，我们讨论有关 Gauss 过程增量的下极限. 我们先介绍 Csörgő 和 Shao (1994) 的结果，在那里他们讨论了 $\inf_{0\le t\le b_T}\sup_{0\le s\le a_T}\|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\|$ 的下极限的一般准则. 这与 $\Gamma(\cdot)$ 的不可微性有关. 在 4.4.1 小节中，我们叙述这一准则. 在 4.4.2 小节中，将它运用于具有平稳增量的 Gauss 过程的研究中. 在 4.4.3 小节中，我们对独立 O-U 过程的无穷级数建立了下极限的精确界. 由此可知通过一般准则给出的界是不可改进的.

4.4.1 关于下极限的准则

设 $\mathcal{B}$ 是具有范数 $\|\cdot\|$ 的可分 Banach 空间，$\{\Gamma(t);-\infty<t<\infty\}$ 是取值于 $\mathcal{B}$ 中的随机过程，P 是由 $\Gamma(\cdot)$ 产生的概率测度.

定理 4.4.1 设 a_T 和 b_T 是非负连续函数, $v(t)$ 是非负单调函数. 假设

$$\frac{1+b_T}{a_T}+a_T\to\infty,\quad \text{当}\quad T\to\infty\ \text{时}, \tag{4.4.1}$$

又设存在 $C>0$ 和 $d>0$ 使得对每一 $0\le t\le 2b_T$,

$$\frac{da_T}{4(\log(b_T/a_T)+\log\log\tilde{a}_T)}\le x\le\frac{4da_T}{(\log(b_T/a_T)+\log\log\tilde{a}_T)},$$

成立

$$P\left\{\sup_{0\le s\le a_T/2}\|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\|\le v(t)\right\}\le c\exp(-da_T/x), \tag{4.4.2}$$

其中 $\tilde{x}=x+1/x$. 那么, 我们有

$$\liminf_{T\to\infty}\inf_{0\le t\le b_T}\sup_{0\le s\le a_T}\frac{\|\Gamma(t+s)-\Gamma(t)\|}{v(da_T/2(\log(b_T/a_T)+\log\log\tilde{a}_T))}\ge\frac{1}{2}\quad\text{a.s.} \tag{4.4.3}$$

定理 4.4.1 的证明从略.

容易看出, 若 $a_T\to 0$ 或 $a_T\to\infty$, 或 $b_T\to\infty$ (当 $T\to\infty$), 则 (4.4.1) 被满足, 因此, 作为特殊情形, (4.4.3) 包含了通常的大增量和小增量.

下例说明了上述定理的一般性. 设 $\{W(t);\ t\ \ge\ 0\}$ 是标准 Wiener 过程. 众所周知 (参见 Csörgő 和 Révész 1981), 对任何 $t\ge 0, a_T>0, 0<x\le a_T$ 有

$$P\left\{\sup_{0\le s\le a_T/2}|W(t+s)-W(t)|\le x^{1/2}\right\}\le 2\exp\left(-\frac{\pi^2a_T}{16x}\right),$$

所以, 由定理 4.4.1, 在 (4.4.1) 被满足时

$$\liminf_{T\to\infty}\inf_{0\le t\le b_T}\sup_{0\le s\le a_T}\frac{|W(t+s)-W(t)|}{(\pi^2a_T/32(\log(b_T/a_T)+\log\log\tilde{a}_T))^{1/2}}\ge\frac{1}{2}\quad\text{a.s.} \tag{4.4.4}$$

特别地

$$\liminf_{h\to 0}\sup_{0\le s\le h}\frac{|W(s)|}{(h/\log\log h^{-1})^{1/2}}\ge\frac{\pi}{8\sqrt{2}}\text{ a.s.}\quad(b_T=0,a_T=h),$$

$$\liminf_{h\to 0}\inf_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\frac{|W(t+s)-W(t)|}{(h/\log h^{-1})^{1/2}}\ge\frac{\pi}{8\sqrt{2}}\text{ a.s.}\quad(b_T=1,a_T=h),$$

$$\liminf_{T\to\infty}\sup_{0\le s\le T}\frac{|W(s)|}{(T/\log\log T)^{1/2}}\ge\frac{\pi}{\sqrt{24}}\text{ a.s.}\quad(b_T=0,a_T=T),$$

$$\liminf_{T\to\infty}\inf_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le a_T}\frac{|W(t+s)-W(t)|}{(a_T/(\log T/a_T+\log\log\tilde{a}_T))^{1/2}}$$
$$\ge\frac{\pi}{8\sqrt{2}}\text{ a.s. }(b_T=T),$$

$$\liminf_{T\to\infty}\inf_{0\le t\le T}\sup_{0\le s\le 1}(\log T)^{1/2}|W(t+s)-W(t)|$$
$$\ge\frac{\pi}{8\sqrt{2}}\text{ a.s.}\quad(b_T=T,a_T=1).$$

众所周知，若不计常数因子，所有上述下极限结果是不可改进的 (参见 Csörgő 和 Révész 1981). 这些重要例子说明了定理 4.4.1 中的速度是不可改进的，当然，这并不是说在所有情形下，(4.4.3) 的一般速度函数一定是不可改进的.

4.4.2 具有平稳增量的 Gauss 过程

作为定理 4.4.1 的一个应用，我们来研究实值 Gauss 过程的一般下极限问题. 设 $\{G(t);t\ge 0\}$ 是零均值且具有平稳增量的实 Gauss 过程. 令

$$\sigma^2(h)=E(G(t+h)-G(t))^2,\ t,h\ge 0. \tag{4.4.5}$$

假设 $\sigma^2(h)$ 在 (0,1) 上是非降的凹函数. 那么由定理 4.2.1, 对所有 $0<x<1$ 我们有

$$P\left\{\sup_{0\le t\le 1}|G(t)-G(0)|\le\sigma(x)\right\}\le 2\exp(-0.17/x). \tag{4.4.6}$$

结合 (4.4.6) 和定理 4.4.1 我们得下述定理.

定理 4.4.2 设 $\{a_T; t \geq 0\}$ 和 $\{b_T; T \geq 0\}$ 是满足 (4.4.1) 的非负连续函数，$\{G(t); t \geq 0\}$ 是零均值且具有平稳增量的 Gauss 过程. 令 $a^* = \sup_{T>0} a_T$. 假设 $\sigma^2(h)$ 在 $(0, a^*)$ 上是非降的凹函数. 那么

$$\liminf_{T\to\infty} \inf_{0\leq t\leq b_T} \sup_{0\leq s\leq a_T} \frac{|G(t+s)-G(t)|}{\sigma(a_T/24(\log(b_T/a_T)+\log\log\tilde{a}_T))} \geq \frac{1}{2} \quad \text{a.s.} \tag{4.4.7}$$

对分数 Wiener 过程，定理 4.4.2 的一个直接推论如下.

定理 4.4.3 设 $\{Z(t); t \geq 0\}$ 是阶为 α, $0 < \alpha < 1/2$, 的分数 Wiener 过程，亦即 $\sigma^2(h) = h^{2\alpha}$. 那么当 (4.4.1) 被满足时有

$$\liminf_{T\to\infty} \inf_{0\leq t\leq b_T} \sup_{0\leq s\leq a_T} \left(\frac{\log(b_T/a_T)+\log\log\tilde{a}_T}{a_T}\right)^{\alpha} |Z(t+s)-Z(t)| \geq 0.1 \quad \text{a.s.} \tag{4.4.8}$$

特别地，我们有

$$\liminf_{h\to 0} \sup_{0\leq s\leq h} \left(\frac{\log\log(1/h)}{h}\right)^{\alpha} |Z(s)| \geq 0.1 \quad \text{a.s.},$$

$$\liminf_{h\to 0} \inf_{0\leq t\leq 1} \sup_{0\leq s\leq h} \left(\frac{\log(1/h)}{h}\right)^{\alpha} |Z(t+s)-Z(t)| \geq 0.1 \quad \text{a.s.},$$

$$\liminf_{T\to\infty} \sup_{0\leq s\leq T} \left(\frac{\log\log T}{T}\right)^{\alpha} |Z(s)| \geq 0.1 \quad \text{a.s.},$$

$$\liminf_{T\to\infty} \inf_{0\leq t\leq T} \sup_{0\leq s\leq a_T} \left(\frac{\log(T/a_T)+\log\log\tilde{a}_T}{a_T}\right)^{\alpha} |Z(t+s)-Z(t)| \geq 0.1 \quad \text{a.s.}$$

4.4.3 独立 O-U 过程的无穷级数

在这一小节中，我们将指出对 O-U 过程的无穷级数，(4.4.7) 中的界是最佳的，进而将指明我们的下极限结果基本上是不可改进的.

回顾坐标过程独立的无穷维 O-U 过程 $Y(\cdot)$ 的无穷级数 $X(\cdot)$ 的定义：

$$\{X(t); -\infty < t < \infty\} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} X_k(t); -\infty < t < \infty\right\}.$$

对 $\{X(\cdot)\}$ 已获得精确的 Lévy 连续模 (见定理 2.2.5, 注 2.2.5, 注 2.2.6 和林正炎, 陆传荣 1992 的定理 3.3.2).

本小节的主要目的是讨论 $\{X(\cdot)\}$ 的下极限结果, 这里总设

$$0 < \Gamma_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\lambda_k} < \infty. \tag{4.4.9}$$

$X(\cdot)$ 是一个平稳 Gauss 过程且

$$\sigma^2(h) = E(X(t+h) - X(t))^2 = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\lambda_k}(1 - e^{-\lambda_k h}), \quad h \geq 0, t \geq 0. \tag{4.4.10}$$

由于 $\Gamma_0 < \infty$, 易知在 $(0, \infty)$ 上 $\sigma^2(h)$ 是凹函数, 所以作为定理 4.4.2 的直接推论, 我们有

定理 4.4.4 设 b_h 是 h 的非负连续函数. 那么

$$\liminf_{h\to 0} \inf_{0\leq t\leq b_h} \sup_{0\leq s\leq h} \frac{|X(t+s) - X(t)|}{\sigma\left(\dfrac{h}{24(\log(b_h/h) + \log\log(1/h))}\right)} \geq 0.5 \quad \text{a.s.} \tag{4.4.11}$$

特别地, 我们有

$$\liminf_{h\to 0} \inf_{0\leq t\leq 1} \sup_{0\leq s\leq h} \frac{|X(t+s) - X(t)|}{\sigma\left(\dfrac{h}{24\log(1/h)}\right)} \geq 0.5 \quad \text{a.s.} \tag{4.4.12}$$

和

$$\liminf_{h\to 0} \sup_{0\leq s\leq h} \frac{|X(t+s) - X(t)|}{\sigma\left(\dfrac{h}{24\log\log(1/h)}\right)} \geq 0.5 \quad \text{a.s.} \tag{4.4.13}$$

在下一个定理中, 我们给出下极限的精确上界.

定理 4.4.5 设 b_h 是 $(0,1)$ 上的非负连续函数，满足

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log(b_h/h)}{\log\log(1/h)}=\infty. \tag{4.4.14}$$

假设存在常数 $\theta>1,\alpha>0$ 使得对所有的 $0\le a,h\le 1$ 有

$$\sigma(ah)\le\theta a^{\alpha}\sigma(h). \tag{4.4.15}$$

那么存在仅依赖于 α 的常数 $d>0$ 使得

$$\limsup_{h\to 0}\inf_{0\le t\le b_h}\sup_{0\le s\le h}\frac{|X(t+s)-X(t)|}{\sigma(db_h\log(b_h/h))}\le 4\theta \quad \text{a.s.} \tag{4.4.16}$$

结合定理 4.4.4 和定理 4.4.5 得

推论 4.4.1 设 b_h 是满足 (4.4.14) 的非负连续函数，假设 (4.4.15) 被满足. 那么

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}&\le\liminf_{h\to 0}\inf_{0\le t\le b_h}\sup_{0\le s\le h}\frac{1}{\sigma(h/(24\log(b_h/h)))}|X(t+s)-X(t)|\\&\le\limsup_{h\to 0}\inf_{0\le t\le b_h}\sup_{0\le s\le h}\frac{1}{\sigma(dh/\log(b_h/h))}|X(t+s)-X(t)|\\&\le 4\theta \quad \text{a.s.}\end{aligned}$$

特别地

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}&\le\liminf_{h\to 0}\inf_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\left(\frac{1}{\sigma(h/(24\log(1/h)))}\right)|X(t+s)-X(t)|\\&\le\limsup_{h\to 0}\inf_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\left(\frac{1}{\sigma(dh/\log(1/h))}\right)|X(t+s)-X(t)|\\&\le 4\theta \quad \text{a.s.}\end{aligned}$$

推论 4.4.2 假设对某 $0<\alpha<1/2$, $\theta_0>0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sigma^2(h)}{h^{2\alpha}}=\theta_0. \tag{4.4.17}$$

那么对某 $d=d(\alpha)$ 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2(24)^{\alpha}}&\le\liminf_{h\to 0}\inf_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\frac{(\log h^{-1})^{\alpha}}{\sigma(h)}|X(t+s)-X(t)|\\&\le\limsup_{h\to 0}\inf_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\frac{(\log h^{-1})^{\alpha}}{\sigma(h)}|X(t+s)-X(t)|\le d \quad \text{a.s.}\end{aligned} \tag{4.4.18}$$

由 (4.4.9) 可知 $\sigma^2(h)/h$ 在 $(0,\infty)$ 上是非增的. 因此对任意的 $0<a\le 1, h>0$ 有

$$\sigma(ah)\ge a^{1/2}\sigma(h), \tag{4.4.19}$$

它和定理 4.4.4 一起可推得

推论 4.4.3 我们有

$$\liminf_{h\to 0}\inf_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\frac{(\log h^{-1})^{\alpha}}{\sigma(h)}|X(t+s)-X(t)|\ge 0.1 \quad \text{a.s.}$$

注 4.4.1 由 (4.4.12), (4.4.13), (4.4.18) 和 Pitt 和 Tran (1979) 的 0-1 律可得: 在条件 (4.4.17) 下, 存在常数 $0<c_1\le\infty$, $0<c_2,c_3<\infty$ 使得

$$\liminf_{h\to 0}\sup_{0\le s\le h}\frac{(\log\log h^{-1})^{\alpha}}{\sigma(h)}|X(s)-X(0)|=c_1 \quad \text{a.s.},$$

$$\liminf_{h\to 0}\inf_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\frac{(\log h^{-1})^{\alpha}}{\sigma(h)}|X(t+s)-X(t)|=c_2 \quad \text{a.s.},$$

$$\limsup_{h\to 0}\inf_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\frac{(\log h^{-1})^{\alpha}}{\sigma(h)}|X(t+s)-X(t)|=c_3 \quad \text{a.s.}$$

注 4.4.2 由 (4.4.19) 可得 $\liminf_{h\to 0}\sigma^2(h)/h>0$, 因此

$$\lim_{h\to 0}h(\log h^{-1})^{1/2}/\sigma(h)=0.$$

所以由推论 4.4.3, 过程 $X(\cdot)$ 的几乎所有样本函数是不可微的.

注 4.4.3 需要指出的是关于 $X(\cdot)$ 或 l^p 值 Gauss 过程 (见 §3.3) 的几乎所有有关上极限的已知结果是平行于标准 Wiener 过程的相应结果的 (如参见 Csörgő 和 Révész 1981 的第一章). 而上述结果指出对下极限情形是十分不同的.

张立新 (1995) 建立了下述关于 $X(\cdot)$ 的精确不可微模.

定理 4.4.6 假设

$$\Gamma_1:=2\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k<\infty. \tag{4.4.20}$$

那么我们有

$$\lim_{h\to 0}\inf_{0\le t\le 1-h}\sup_{0\le s\le h}\Big(\frac{8\log h^{-1}}{\pi^2\Gamma_1 h}\Big)^{1/2}|X(t+s)-X(t)|=1 \quad \text{a.s.} \tag{4.4.21}$$

Csörgő 和 Shao (1994) 指出，存在常数 $C(\alpha)$ 使得 (4.4.18) 中可以等号代替不等号. 他们提出下述猜测:

猜测 假设 (4.4.17) 被满足. 那么存在仅依赖于 α 的常数 $C(\alpha)$ 使得

$$\liminf_{h\to 0}\sup_{0\le s\le h}\frac{(\log\log h^{-1})^\alpha}{\sigma(h)}|X(s)|=C(\alpha)\quad \text{a.s.},$$

$$\lim_{h\to 0}\inf_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\frac{(\log h^{-1})^\alpha}{\sigma(h)}|X(t+s)-X(t)|=C(\alpha)\quad \text{a.s.}$$

$C(\alpha)$ 的精确的计算看来是困难的.

§4.5 两参数 Gauss 过程的下极限

4.5.1 两参数 Wiener 过程的下极限

设 $\{W(x,y);0\le x,y<\infty\}$ 是两参数 Wiener 过程，$0<a_T\le T$ 和 $b_T\ge T^{1/2}$ 是 T 的非降函数. 设

$$D_T=\{(x,y);xy\le T,0\le x,y\le b_T\},$$

$$D_T^*=\{(x,y);xy=T,0\le x,y\le b_T\}.$$

对矩形 $R=[x_1,x_2]\times[y_1,y_2]$, 定义 $\lambda(R)=(x_2-x_1)(y_2-y_1)$,

$$W(R)=W(x_2,y_2)-W(x_1,y_2)-W(x_2,y_1)+W(x_1,y_1).$$

设 $L_T=\{R;R\subset D_T,\lambda(R)\le a_T\}$ 是矩形集 $R=[x_1,x_2]\times[y_1,y_2]$. 定义

$$\lambda_T=\{2T(\log(1+\log b_T T^{-1/2})-\log\log\log T)\}^{-1/2},$$

$$\beta_T=T^{-1/2}\Big(\frac{\log\log T}{\log b_T T^{-1/2}}\Big)^{1/2}\Big(\log\frac{\log\log T}{\log b_T T^{-1/2}}\Big)^{-3/2}.$$

Lacey (1989) 建立了如下的重对数律：

定理 4.5.1 假设 $\lambda'_T=\{2T\log(1+\log b_T T^{-1/2})\}^{-1/2}$ 满足

$$\lim_{\theta\downarrow 1}\limsup_{k\to\infty}\lambda'_{\theta^k}/\lambda'_{\theta^{k+1}}=1 \tag{a}$$

且 $b'_T=b_T T^{-1/2}$ 是 T 的非降函数，$b'_T\to\infty$. 又设对任何 $0<\epsilon<1$ 及某 $0<a<1$ 有

$$\sum_k \exp\{-(\log b'_{m_k})^{\varepsilon}\}<\infty, \tag{4.5.1}$$

其中 $m_k=\exp(k^a)$, $k\in N$. 那么

$$\liminf_{T\to\infty}\sup_{(x,y)\in D_T^*}\lambda'_T W(x,y)=1 \quad \text{a.s.} \tag{4.5.2}$$

特别地

$$\liminf_{T\to\infty}\sup_{\substack{0\le x,y\le T\\ xy=T}}\frac{W(x,y)}{\sqrt{2T\log\log T}}=1 \quad \text{a.s.} \tag{4.5.3}$$

利用推论 4.3.1, 我们可得两参数 Wiener 过程的 Chung 型重对数律 (参见 Talagrand 1994):

定理 4.5.2 我们有

$$0<\liminf_{T\to\infty}\frac{(\log\log T)^{1/2}}{T(\log\log\log T)^{3/2}}\sup_{0\le x,y\le T}|W(x,y)|<\infty \quad \text{a.s.} \tag{4.5.4}$$

Lacey (1989) 问道：对于 (4.5.2), (4.5.1) 式是否是必要的. 进一步的问题是在减弱 (4.5.1) 后，是否存在类似于 (4.5.2) 的下极限. 另外，一个有趣的问题是 :(4.5.3) 型下极限与 (4.5.4) 型下极限之间有什么联系. 张立新 (1996b) 回答了这些问题. 他得到了这两类不同的下极限的分界线，也指出了定理 4.5.1 中的条件 (a) 是不必要的. 其结果如下.

定理 4.5.3 若

$$\Delta_T:=\frac{\log b_T T^{-1/2}}{\log\log T}\to\infty \quad (T\to\infty), \tag{4.5.5}$$

则

$$\begin{aligned}
&\liminf_{T\to\infty}\lambda_T\sup_{R\subset D_T}|W(R)|\\
&\quad=\liminf_{T\to\infty}\lambda_T\sup_{R\subset D_T^*}|W(R)| \qquad (4.5.6)\\
&\quad=\liminf_{T\to\infty}\lambda_T\sup_{(x,y)\in D_T}|W(x,y)|\\
&\quad=\liminf_{T\to\infty}\lambda_T\sup_{(x,y)\in D_T^*}|W(x,y)|\\
&\quad=1\quad \text{a.s.}
\end{aligned}$$

若

$$\Delta_T\to 0\quad (T\to\infty), \tag{4.5.7}$$

则存在正常数 C_1, C_2 使得

$$C_1\le\liminf_{T\to\infty}\beta_T\sup_{R\subset D_T}|W(R)|\le C_2\quad \text{a.s.}, \tag{4.5.8}$$

$$C_1\le\liminf_{T\to\infty}\beta_T\sup_{(x,y)\in D_T}|W(x,y)|\le C_2\quad \text{a.s.} \tag{4.5.9}$$

介于这两个下极限结果之间的截断双曲线起着联系它们的桥梁作用. 若我们取 $b_T=T^{1/2}$, 则 (4.5.9) 恰为 (4.5.4). 而若取 $b_T=T$, 则 (4.5.6) 就是 Lacey 型重对数律 (4.5.3). 另外, 条件 (4.5.5) 比 Lacey 的条件 (4.5.1) 弱得多. 为验证这一事实, 只需指出在定理 4.5.1 中的条件下, (4.5.1) 等价于

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\log\log b_T'}{\log\log\log T}=\infty. \tag{4.5.10}$$

事实上, 若 (4.5.10) 成立, 则

$$\liminf_{k\to\infty}\frac{\log\log b_{m_k}'}{\log\log k}=\liminf_{k\to\infty}\frac{\log\log b_{m_k}'}{\log\log\log m_k}>\frac{2}{\varepsilon}.$$

故对充分大的 k, 有

$$(\log b_{m_k}')^{\varepsilon}\ge(\log k)^2,$$

这就推得 (4.5.1) 成立.

另一方面, 若 (4.5.1) 成立, 注意到 b_T' 是非降的, 我们有

$$k\exp(-(\log b'_{m_k})^{\varepsilon}) \le \sum_{k=1}^{\infty}\exp(-(\log b'_{m_k})^{\varepsilon}) < \infty.$$

故

$$\exp((\log b'_{m_k})^{\varepsilon}) \ge ck,$$

这就推出

$$\liminf_{k\to\infty}\frac{\log\log b'_{m_k}}{\log\log\log m_k} \ge \frac{1}{\varepsilon}.$$

对 $m_k \le T \le m_{k+1}$ 我们有

$$\frac{\log\log b'_T}{\log\log\log T} \ge \frac{\log\log b'_{m_k}}{\log\log\log m_k}\frac{\log\log m_k}{\log\log\log m_{k+1}}.$$

因此 (4.5.10) 成立.

由定理 4.5.1, 我们也可得：若

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\log\log b_T T^{-1/2}}{\log\log\log T} = r \ge 1, \tag{4.5.11}$$

那么

$$\liminf_{T\to\infty}\lambda'_T \sup_{(x,y)\in D_T}|W(x,y)| = \left(\frac{r-1}{r}\right)^{1/2} \quad \text{a.s.} \tag{4.5.12}$$

因此，从 (4.5.12) 容易看出，对 (4.5.2) 而言， (4.5.1) 或 (4.5.10) 是十分接近于必要的.

注 4.5.1　记

$$\theta(T) = (2 + 2\log b_T)/\log\log T.$$

Csáki 和 Shi (1998) 研究了当 $\theta(T)$ 趋向于有限极限时两参数 Wiener 过程的下极限性质，得到了如下结果：

假设 $b_T \ge 1$ 是非降的且 $\theta(T)/T$ 是非增的. 又若 $\theta := \lim_{T\to\infty}\theta(T) \in [0,\infty)$. 那么

$$\liminf_{T\to\infty}\sqrt{\frac{\theta(T)}{T}}\sup_{st=T;0\le s,t\le\sqrt{T}b_T}W(s,t)$$
$$= \begin{cases} -2, & \text{当 } \theta = 0\text{时}, \\ -\sqrt{\theta}\beta(1/\theta), & \text{当 } 0 < \theta < \infty \text{ 时}, \end{cases}$$

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{\sqrt{T\theta(T)}}\sup_{st=T;0\le s,t\le\sqrt{T}b_T}|W(s,t)|$$
$$=\begin{cases}\pi/2, & \text{当 } \theta=0\text{时},\\ \theta^{-1/2}\gamma(1/\theta), & \text{当 } 0<\theta<\infty \text{ 时},\end{cases}$$

其中 $\gamma(u)>0$ 是下述 Kummer 函数 $M(-u/2,1/2,\gamma^2/2)$ 的最大正零点:

$$M(a,b,x):=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}\cdot\frac{x^n}{n!},$$

$\beta(u)\in(-\infty,\infty)$ 是下述抛物柱函数 $D_u(\cdot)$ 的最大实零点:

$$D_u(x):=2^{\frac{u}{2}}e^{-\frac{x^2}{4}}\Big[\frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma((1-u)/2)}M\Big(-\frac{u}{2},\frac{1}{2},\frac{x^2}{2}\Big)$$
$$+\frac{x}{\sqrt{2}}\frac{\Gamma(-1/2)}{\Gamma(-u/2)}M\Big(\frac{1-u}{2},\frac{3}{2},\frac{x^2}{2}\Big)\Big].$$

定理 4.5.1 和 4.5.2 的证明不在这里给出. 定理 4.5.3 的证明基于下述概率不等式.

引理 4.5.1 *对任给的 $\varepsilon>0$, 存在常数 $C=C(\varepsilon)>0$, $u_0=u_0(\varepsilon)>0$ $T_0=T_0(\varepsilon)>0$ 使得对任何 $u\ge u_0$, $T\ge T_0$ 有*

$$P\Big\{\sup_{(x,y)\in D_T^*}|W(x,y)|\le uT^{1/2}\Big\}$$
$$\le\exp\big(-C(1+\log b_TT^{-1/2})e^{-u^2/(2-\varepsilon)}\big).\qquad(4.5.13)$$

证明 设 $L=L(T)$ 是使下述不等式成立的最大整数:

$$T^{1/2}M^{L+1}<b_T\quad(M>1).$$

定义矩形

$$S_i=S_i(T)=[x_1(i),x_2(i)]\times[y_1(i),y_2(i)]$$
$$=[T^{1/2}M^i,T^{1/2}M^{i+1}]\times[0,T^{1/2}M^{-i-1}],\quad i=0,1,\cdots,L.$$

那么 $S_i \subset D_T$, $\lambda(S_i) = T(1 - 1/M)$, $i = 0, 1, \cdots, L$, 且 $L \geq (\log b_T T^{-1/2})/\log M$. 设

$$\tilde{S}_i = [0, T^{1/2}M^i] \times [0, T^{1/2}M^{-i-1}], \quad i = 0, 1, \cdots, L.$$

那么

$$\begin{aligned}
&P\Big\{\sup_{(x,y)\subset D_T^*} |W(x,y)| \leq uT^{1/2}\Big\} \\
&\leq P\Big\{\max_{0\leq i\leq L} |W(x_2(i), y_2(i))| \leq uT^{1/2}\Big\} \\
&= P\Big\{\max_{0\leq i\leq L} |W(\tilde{S}_i) + W(S_i)| \leq uT^{1/2}\Big\}. \qquad (4.5.14)
\end{aligned}$$

我们使用条件概率化的论证方法. 记 σ 域 $\sigma_i = \sigma\{W(x,y), 0 \leq y \leq b_T, 0 \leq x \leq T^{1/2}M^{i+1}\}$, 那么 $W(S_i) \in \sigma_i$, $W(\tilde{S}_i) \in \sigma_{i-1}$, 且 $W(S_i)$ 与 σ_{i-1} 独立. 故对充分大的 M, 我们有

$$\begin{aligned}
&P\Big\{\max_{0\leq i\leq L} |W(\tilde{S}_i) + W(S_i)| \leq uT^{1/2}\Big\} \\
&= E\Big[I\Big\{\max_{0\leq i\leq L-1} |W(\tilde{S}_i) + W(S_i)| \leq uT^{1/2}\Big\} \\
&\quad \cdot P(|W(\tilde{S}_L) + W(S_L)| \leq uT^{1/2}|\sigma_{L-1})\Big] \\
&\leq E\Big[I\Big\{\max_{0\leq i\leq L-1} |W(\tilde{S}_i)+W(S_i)| \leq uT^{1/2}\Big\} \cdot P(|W(S_L)| \leq uT^{1/2})\Big] \\
&= P\Big(\max_{0\leq i\leq L-1} |W(\tilde{S}_i) + W(S_i)| \leq uT^{1/2}) \cdot P(|W(S_L)| \leq uT^{1/2}\Big) \\
&\leq \cdots \leq \prod_{i=0}^{L} P(|W(S_i)| \leq uT^{1/2}) \\
&\leq \Big\{1 - 2\Phi\Big(-\Big(\frac{M}{M-1}\Big)^{1/2} u\Big)\Big\}^{L+1} \leq \Big\{1 - \exp\Big(-\frac{u^2}{2-\varepsilon}\Big)\Big\}^{L+1} \\
&\leq \exp\Big\{-c\frac{1}{\log M}\Big(\log b_T T^{-1/2}\Big)e^{-u^2/(2-\varepsilon)}\Big\}. \qquad (4.5.15)
\end{aligned}$$

因此由 (4.5.14) 和 (4.5.15) 有

$$P\left\{\sup_{(x,y)\in D_T^*}|W(x,y)|\le uT^{1/2}\right\}$$
$$\le \exp\left\{-c\frac{1}{\log M}(\log b_T T^{-1/2})e^{-u^2/(2-\varepsilon)}\right\}.$$

这就推得 (4.5.13) 成立.

由推论 4.3.1 即得下述引理.

引理 4.5.2 *存在常数 $C>0$ 使得对任何 $0<u\le 1/2$ 和 $T_1,T_2>0$ 有*

$$P\left\{\sup_{(x,y)\in[0,T_1]\times[0,T_2]}|W(x,y)|\le (T_1T_2)^{1/2}\left(u\left(\log\frac{1}{u}\right)^3\right)^{1/2}\right\}$$
$$\overset{KS}{\ge} \exp\left(-\frac{C}{u}\right).$$

引理 4.5.3 *存在常数 $C_2>0$ 使得对任何 $0<u\le 1/2$ 和 $T>0$ 有*

$$\exp\left(-C_2\frac{1}{u}\log b_T T^{-1/2}\right)$$
$$\le P\left\{\sup_{R\subset D_T}|W(R)|\le T^{1/2}\left(u\left(\log\frac{1}{u}\right)^3\right)^{1/2}\right\}$$
$$\le \exp\left(-\frac{1}{C_2 u}\log b_T T^{-1/2}\right), \qquad (4.5.16)$$

$$\exp\left(-C_2\frac{1}{u}\log b_T T^{-1/2}\right)$$
$$\le P\left\{\sup_{(x,y)\in D_T}|W(x,y)|\le T^{1/2}\left(u\left(\log\frac{1}{u}\right)^3\right)^{1/2}\right\}$$
$$\le \exp\left(-\frac{1}{C_2 u}\log b_T T^{-1/2}\right). \qquad (4.5.17)$$

证明 注意到

$$\sup_{(x,y)\in D_T}|W(x,y)|\le \sup_{R\subset D_T}|W(R)|\le 4\sup_{(x,y)\in D_T}|W(x,y)|, \quad (4.5.18)$$

我们只要证明 (4.5.16). 首先我们建立下界. 不失一般性可设 $T=1$. 记 $D_T=D$, $b_T=b$ 等等. 取 $R_j=[0,2^j]\times[0,2^{-j+1}]$, $j=-1$

$-[\log_2 b], \cdots, 1+[\log_2 b]$. 注意到每一 R_j 的面积为 2, 且

$$R^* := \bigcup_{j=-1-[\log_2 b]}^{1+[\log_2 b]} R_j \supset D = \{(x,y) : xy \le 1, 0 \le x, y \le b\},$$

那么由引理 4.5.2 和定理 1.2.4 我们有

$$\begin{aligned}
&P\left\{\sup_{(x,y)\in D} |W(x,y)| \le \left(u\left(\log\frac{1}{u}\right)^3\right)^{1/2}\right\} \\
&\quad \ge P\left\{\sup_{(x,y)\in R^*} |W(x,y)| \le \left(u\left(\log\frac{1}{u}\right)^3\right)^{1/2}\right\} \\
&\quad \overset{KS}{\ge} \prod_{j=-1-[\log_2 b]}^{1+[\log_2 b]} P\left\{\sup_{(x,y)\in R_j} |W(x,y)| \le \left(u\left(\log\frac{1}{u}\right)^3\right)^{1/2}\right\} \\
&\quad \overset{KS}{\ge} \exp\left(-\frac{C}{u}\log b\right).
\end{aligned}$$

因此我们求得了下界. 对于上界, 定义

$$S_i = [T^{1/2}M^i, T^{1/2}M^{i+1}] \times [0, T^{1/2}M^{-i-1}], \quad i = 0, 1, \cdots, L,$$

其中 L 是使 $T^{1/2}M^{L+1} < b_T$ $(M > 1)$ 成立的最大整数. 那么由推论 4.3.1 的 (4.3.25) 式, 我们有

$$\begin{aligned}
&P\left\{\sup_{R\subset D_T} |W(R)| \le T^{1/2}\left(u\left(\log\frac{1}{u}\right)^3\right)^{1/2}\right\} \\
&\quad \le P\left\{\sup_{i}\sup_{R\subset S_i} |W(R)| \le T^{1/2}\left(u\left(\log\frac{1}{u}\right)^3\right)^{1/2}\right\} \\
&\quad = \prod_{i=0}^{L} P\left\{\sup_{R\subset S_i} |W(R)| \le T^{1/2}\left(u\left(\log\frac{1}{u}\right)^3\right)^{1/2}\right\} \\
&\quad = \prod_{i=0}^{L} P\left\{\sup_{R\subset[0,1]\times[0,1]} |W(R)| \le \left(\frac{M}{M-1}\right)^{1/2}\left(u\left(\log\frac{1}{u}\right)^3\right)^{1/2}\right\} \\
&\quad \le \prod_{i=0}^{L} P\left\{\sup_{0\le x,y\le 1} |W(x,y)| \le \left(\frac{M}{M-1}\right)^{1/2}\left(u\left(\log\frac{1}{u}\right)^3\right)^{1/2}\right\}
\end{aligned}$$

$$\le \exp\Big(-\frac{C}{u}\frac{M-1}{M}L\Big)$$
$$\le \exp\Big(-\frac{C}{u}\log b_T T^{-1/2}\Big).$$

引理 4.5.3 证毕.

定理 4.5.3 的证明 从定理 2.3.2 的证明的第一步, 令 $a_T = T$ (参见 (2.3.23)) 就得 (4.5.6) 的上界. 利用不等式 (4.5.13) 可验证 (4.5.6) 的下界. 类似地, 利用 (4.5.16) 和 (4.5.17) 可证明 (4.5.8) 和 (4.5.9).

4.5.2 两参数 O-U 过程的不可微模

设 $\{X(t,v); t \ge 0, v \ge 0\}$ 是两参数 O-U 过程 (OUP_2)

$$X(t,v) = e^{-\alpha t-\beta v}\Big\{X_0 + \int_0^t\int_0^v e^{\alpha x+\beta v}dW(x,y)\Big\},\quad t\ge 0,\quad v\ge 0. \tag{4.5.19}$$

Lin (1995d) 给出了 OUP_2 $\{X(t,v)\}$ 的不可微模. 假设存在 $\delta > 0$ 使得 $E|X_0|^\delta < \infty$. 记

$$\beta(v) = (1-e^{-2\beta v})/2\beta.$$

定理 4.5.4 对任意的 $v > 0$ 我们有

$$\lim_{h\to 0}\inf_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\Big(\frac{8\log h^{-1}}{\pi^2\beta(v)h}\Big)^{1/2}|X(t+s,v)-X(t,v)| = 1\quad \text{a.s.,} \tag{4.5.20}$$

$$\lim_{h\to 0}\inf_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\sup_{v\le u\le v+h}\Big(\frac{8\log h^{-1}}{\pi^2\beta(v)h}\Big)^{1/2}|X(t+s,u)-X(t,u)|$$
$$= 1\quad \text{a.s.} \tag{4.5.21}$$

注 4.5.2 由于 $X(t,v)$ 关于 t 和 v 是对称的, 故对任何 $t > 0$ 也有

$$\lim_{h\to 0}\inf_{0\le v\le 1}\sup_{0\le u\le h}\Big(\frac{8\log h^{-1}}{\pi^2\beta(t)h}\Big)^{1/2}|X(t,v+u)-X(t,v)| = 1\quad \text{a.s.,}$$

$$\lim_{h\to 0}\inf_{0\le v\le 1}\sup_{0\le u\le h}\sup_{t\le s\le t+h}\left(\frac{8\log h^{-1}}{\pi^2\beta(t)h}\right)^{1/2}|X(s,v+u)-X(s,v)|$$
$$=1 \quad \text{a.s.}$$

定理 4.5.4 的证明思路如下. 首先, 如同 (2.5.2), 我们写

$$X(t+s,v)-X(t,v)=\xi_1(t,s,v)+\xi_2(t,s,v)+\xi_3(t,s,v), \quad (4.5.22)$$

其中

$$\xi_1(t,s,v)=e^{-\alpha(t+s)-\beta v}(1-e^{\alpha s})X_0,$$
$$\xi_2(t,s,v)=e^{-\alpha(t+s)-\beta v}(1-e^{\alpha s})\int_0^{t+s}\int_0^v e^{\alpha x+\beta y}dW(x,y),$$
$$\xi_3(t,s,v)=e^{-\alpha t-\beta v}\int_t^{t+s}\int_0^v e^{\alpha x+\beta y}dW(x,y).$$

可证: 对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $h=h(\varepsilon)>0$ 和 $C=C(\varepsilon)>0$ 使得对 $i=1,2$ 有

$$P\left\{\sup_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\sup_{v\le u\le v+h}\left(\frac{\log h^{-1}}{h}\right)^{1/2}|\xi_i(t,s,u)|\ge\varepsilon\right\}$$
$$\le C(h\log h^{-1})^{\delta/2}.$$

由此易得

$$\lim_{h\to 0}\sup_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\sup_{v\le u\le v+h}\left(\frac{8\log h^{-1}}{\pi^2\beta(v)h}\right)^{1/2}|\xi_i(t,s,u)|$$
$$=0 \quad \text{a.s.}, \quad i=1,2. \quad (4.5.23)$$

为证明

$$\limsup_{h\to 0}\inf_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\sup_{v\le u\le v+h}\left(\frac{8\log h^{-1}}{\pi^2\beta(v)h}\right)^{1/2}|X(t+s,u)-X(t,u)|$$
$$\le 1 \quad \text{a.s.}, \quad (4.5.24)$$

记

$$\eta_1(t,s,u)=e^{-\beta u}\int_t^{t+s}\int_0^u e^{\beta y}dW(x,y),$$
$$\eta_2(t,s,u)=e^{-\alpha t-\beta u}\int_t^{t+s}\int_0^u (e^{\alpha x}-e^{\alpha t})e^{\beta y}dW(x,y).$$

则 $\xi_3(t,s,u)=\eta_1(t,s,u)+\eta_2(t,s,u)$. 仿照对 $\xi_2(t,s,u)$ 的研究，可得

$$\lim_{h\to 0}\sup_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\sup_{v\le u\le v+h}\left(\frac{8\log h^{-1}}{\pi^2\beta(v)h}\right)^{1/2}|\eta_2(t,s,u)|=0 \quad \text{a.s.} \tag{4.5.25}$$

进一步还可证明

$$\limsup_{h\to 0}\inf_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\sup_{v\le u\le v+h}\left(\frac{8\log h^{-1}}{\pi^2\beta(v)h}\right)^{1/2}|\eta_1(t,s,u)|\le 1 \quad \text{a.s.} \tag{4.5.26}$$

结合 (4.5.23), (4.5.25) 和 (4.5.26) 即得 (4.5.24).

对任给的 $v>0$

$$\liminf_{h\to 0}\inf_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\left(\frac{8\log h^{-1}}{\pi^2\beta(v)h}\right)^{1/2}|X(t+s,v)-X(t,v)|\ge 1 \quad \text{a.s.} \tag{4.5.27}$$

等价于

$$\liminf_{h\to 0}\inf_{0\le t\le 1}\sup_{0\le s\le h}\left(\frac{8\log h^{-1}}{\pi^2\beta(v)h}\right)^{1/2}|\eta_1(t,s,v)|\ge 1 \quad \text{a.s.} \tag{4.5.28}$$

令

$$\eta_v(t)=e^{-\beta v}\int_0^t\int_0^v e^{\beta y}dW(x,y).$$

注意到 $\eta_v(t)/\beta(v)^{1/2}$ 关于 t 是 Wiener 过程且 $\eta_1(t,s,v)$ 是 $\eta_v(t)$ 的增量，由 Wiener 过程的不可微模可知 (4.5.28) 成立，因此 (4.5.27) 得证. 结合 (4.5.24), 就完成了定理 4.5.4 的证明.

由类似的讨论， Lu 和 Yu (1997) 对两参数 O-U 过程证明了 Chung 重对数律:

定理 4.5.5 *在定理 4.5.4 的假设下我们有*

$$\liminf_{h\to 0}\sup_{0\le t\le h}\left(\frac{8\log\log h^{-1}}{\pi^2\beta(v)h}\right)^{1/2}|X(t,v)-X(0,v)|=1 \quad \text{a.s.},$$

$$\liminf_{h\to 0}\sup_{0\le t\le h}\sup_{v\le u\le v+h}\left(\frac{8\log\log h^{-1}}{\pi^2\beta(v)h}\right)^{1/2}|X(t,u)-X(0,u)|$$
$$=1 \quad \text{a.s.}$$

§4.6 Gauss 过程的其他轨道性质

4.6.1 Gauss 过程的 p 变差

设 $\{X(t); t \geq 0\}$ 为具有平稳增量、均值为零的 Gauss 过程. 令

$$\sigma^2(h) = E(X(t+h) - X(t))^2. \tag{4.6.1}$$

令 $\pi = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k_n} = a\}$ 表示 $[0, a]$ 的一个分划且记 $m(\pi) = \max_{1 \leq i \leq k_n}(x_i - x_{i-1})$ 为 π 中的最大区间的长度.

对随机过程的 p 变差的关注始于 Lévy 关于 Wiener 过程 $\{W(t); t \geq 0\}$ 的 2 变差的漂亮结果, 即

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{2^n - 1} \left\{W\left(\frac{i}{2^n}\right) - W\left(\frac{i+1}{2^n}\right)\right\}^2 = 1 \quad \text{a.s.}$$

这一结果有很多推广. Dudley (1973) 指出对 $[0, a]$ 的任何分划序列 $\{\pi(n)\}$, 当 $m(\pi(n)) = o(1/\log n)$ 时,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{x_i \in \pi(n)} (W(x_i) - W(x_{i-1}))^2 = a \quad \text{a.s.} \tag{4.6.2}$$

而 de la Vega (1974) 指出当关于 $m(\pi(n))$ 的条件减弱为 $m(\pi(n)) = O(1/\log n)$ 时上述结论就不再成立. Taylor (1972) 证明了

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{\pi \in Q_n(\delta)} \sum_{x_i \in \pi} \bar{\psi}(|W(x_i) - W(x_{i-1})|) = 1 \quad \text{a.s.},$$

其中 $\bar{\psi}(x) = |x/\sqrt{2 \log\log 1/x}|^2$ 且 $Q_a(\delta) = \{[0, a]$ 的分划 $\pi : m(\pi) \leq \delta\}$. 对一个随机过程, 以 p 代替 2 时, 这类结果称为是关于这个过程的 p 变差结果.

关于 Gauss 过程 p 变差的各种结果已由 Kôno (1969), Kawata 和 Kôno (1973), Giné 和 Klein (1975), Jain 和 Monrad (1983) 及 Adler 和 Pyke (1993) 等人得到. Marcus 和 Rosen (1992b) 证明了下述定理.

定理 4.6.1 若在 $[0,a]$ 上 $\sigma^2(h)$ 是凹函数，且对某 $p \geq 2$ 和 $0 < b < \infty$ 满足 $\lim_{h\to 0}\sigma(h)/h^{1/p} = b$ ，那么对 $[0,a]$ 的任一满足 $m(\pi) = o((1/\log n)^{p/2})$ 的分划序列 $\{\pi(n)\}$ 有

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{x_i\in\pi(n)} |X(x_i) - X(x_{i-1})|^p = E|N(0,1)|^p\, b^p\, a \quad \text{a.s.} \tag{4.6.3}$$

且

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \sum_{x_i\in\pi(n)} |X^2(x_i) - X^2(x_{i-1})|^p \\ &= E|N(0,1)|^p (2b)^p \int_0^a |X(x)|^p dx \quad \text{a.s.}\end{aligned} \tag{4.6.4}$$

Shao (1996b) 减弱了加在 $\sigma(h)$ 上的条件且给出了较一般的结果.

定理 4.6.2 设 $p > 1$. 假设 $\sigma^2(h)$ 是非降的. 如果以下两条件之一被满足:

(A1) 在 $[0,a]$ 上 $\sigma^2(h)$ 是凹函数，且

$$m(\pi(n)) = o((\log n)^{-(1\vee(p/2))});$$

(A2) 对某个 $\varepsilon_0 > 0$, 在 $[0, a+\varepsilon_0]$ 上 $\sigma^2(h)$ 是凸函数，且

$$\max_{x_i\in\pi(n)} (x_i - x_{i-1})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\wedge\frac{1}{p}}/\sigma(x_i - x_{i-1}) = o(\log^{-1/2} n).$$

那么对 $[0,a]$ 的任一分划序列 $\{\pi(n)\}$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{x_i\in\pi(n)} \frac{(x_i - x_{i-1})|X(x_i) - X(x_{i-1})|^p}{\sigma^p(x_i - x_{i-1})} = aE|N(0,1)|^p \quad \text{a.s.} \tag{4.6.5}$$

定理 4.6.3 假设 $\sigma^2(h)$ 在 $[0,a]$ 上连续，满足

$$\int_1^\infty \sigma(e^{-z^2})dz < \infty.$$

那么在定理 4.6.2 的条件下我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{x_i\in\pi(n)}\frac{(x_i-x_{i-1})|X^2(x_i)-X^2(x_{i-1})|^p}{\sigma^p(x_i-x_{i-1})}$$
$$=2^pE|N(0,1)|^p\int_0^a|X(x)|^p dx \quad \text{a.s.} \qquad (4.6.6)$$

4.6.2 Gauss 场的像与图的分形性质

随机分形的研究早在 20 世纪 40 年代就开始了，尽管当时还没有随机分形这个词. Lévy 早在 1940 年左右就开始研究 Wiener 过程的样本轨道性质，随后， Besicovith 和 Taylor 也研究了类似的问题. 综合他们的结果，可知：一维标准 Wiener 过程 $W(\cdot)$ 的零集的 Hausdorff 维数为 1/2, 即

$$\dim\{t\in[0,1]:W(t)=0\}=\frac{1}{2}\quad \text{a.s.}$$

这可能是随机分形的最早的一个漂亮结果. 在 Gauss 场 (包括多参数 Wiener 过程) 的像、图、水平集和多重点的分形性质中有着很多值得重视的有兴趣的问题. 早期的结果是：一维标准 Wiener 过程在 $[0,1]$ 的像集的 Hausdorff 维数为 1, 而 2 维以上 Wiener 过程在 $[0,1]$ 上的像集的 Hausdorff 维数为 2, 即

$$\dim\{W(t):t\in[0,1]\}=\begin{cases}1, & 若 d=1,\\ 2, & 若 d\geq 2,\end{cases}$$

其中 $W(t)=(W_1(t),\cdots,W_d(t))$ 为 d 维 Wiener 过程. Xiao (1995) 研究了指数 α 的 Gauss 场的像和图的 Hausdorff 维数和 packing 维数. 这一节我们介绍他的结果. 其他有关的成果可参见 Adler (1981), Cuzick (1978, 1981), Goldman (1981), Kahane (1985), Taylor 和 Tricot (1985), Talagrand (1995) 等.

设 $X(t)=(X_1(t),\cdots,X_d(t))$ 是 $\mathcal{R}^N$ 上的 $\mathcal{R}^d$ 值 Gauss 向量场，其坐标场 $X_1,\cdots,X_d$ 具有平稳增量. 记

$$\sigma_j^2(t)=E\big(X_j(t)-X_j(0)\big)^2.$$

若对每一 $j=1,2,\cdots,d$, 存在 $0<\alpha_j\leq 1$ 使得

$$\begin{aligned}\alpha_j &= \sup\{\alpha>0:\lim_{|t|\to 0}|t|^{-\alpha}\sigma_j(t)=0\}\\ &= \inf\{\alpha>0:\lim_{|t|\to 0}|t|^{-\alpha}\sigma_j(t)=\infty\},\end{aligned}$$

其中 $|\cdot|$ 是 Euclidean 范数, 则称 $X(t)$ 是指数 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_d)$ 的 (N,d) Gauss 场. 为简单计, 我们将假设, 当 $|t|\geq\epsilon>0$ 时, 在 $[-1,1]^N$ 上, 所有 $|\sigma_j(t)|\geq\delta>0$. 为了避免退化, 我们对坐标场 $X_1,\cdots,X_d$ 作下述限制: 存在常数 $\epsilon>0$ 使得

$$\det\operatorname{cov}(X(t)-X(s))\geq\varepsilon\prod_{j=1}^{d}\sigma_j^2(t-s),\qquad(4.6.7)$$

其中 $\operatorname{cov}(Y)$ 记为随机向量 Y 的协方差阵, $\det B$ 为矩阵 B 的行列式. 若坐标场是独立的, 这一条件被满足. 分数 Wiener 过程是指数 α 的 Gauss 场的一个特例.

我们来给出 Hausdorff 维数和 packing 维数的定义. 设 $\phi:[0,1]\to[0,\infty)$ 是任一连续的增函数, 满足 $\phi(0)=0$. $E\subset\mathcal{R}^N$ 的 ϕ-Hausdorff 测度定义为

$$\phi\text{-mes}E=\lim_{\delta\to 0}\inf\Big\{\sum_i\phi(2r_i):E\subset\bigcup_i B(x_i,r_i),\ r_i\leq\delta\Big\},\quad(4.6.8)$$

其中 $B(x_i,r_i)$ 表示中心为 x_i, 半径为 r_i 的开球, 此外 $B(x_i,r_i)$ 组成 E 的一个 δ 覆盖 (即半径不超过 δ 的球的类, 它们的并包含了 E). (4.6.8) 中的下确界是在 E 的所有 δ 覆盖上取的. ϕ-mes 是外测度度量且所有的 Borel 集关于它是可测的. 一子集 E 的 Hausdorff 维数定义为

$$\begin{aligned}\dim E &= \inf\{\alpha>0:s^\alpha\text{-mes}E=0\}\\ &= \sup\{\alpha>0:s^\alpha\text{-mes}E=\infty\}.\end{aligned}$$

Taylor 和 Tricot (1985) 用不相交的填充代替最少的覆盖定义

了另一个集函数 ϕ-Pack E :

$$\phi\text{-Pack } E = \limsup_{\delta\to 0}\Big\{\sum_i \phi(2r_i) : B(x_i, r_i) \text{ 互不相交},$$
$$x_i \in E, r_i \le \delta\Big\}.$$

ϕ--Pack 不是可列次可加的，因而它不是外测度. 然而， ϕ-Pack 是预测度，因此我们可由它产生一个 $\mathcal{R}^N$ 上的外测度:

$$\phi\text{-pack } E = \inf\Big\{\sum_i \phi\text{-Pack}E_i : E \subset \bigcup_i E_i\Big\}.$$

ϕ-pack E 称为 E 的 ϕ-packing 测度. E 的 packing 维数定义为

$$\begin{aligned}\text{Dim } E &= \inf\{\alpha > 0 : s^\alpha\text{-pack}E = 0\}\\ &= \sup\{\alpha > 0 : s^\alpha\text{-pack}E = \infty\}.\end{aligned}$$

可证 ϕ-mes $E \le \phi$-pack E (参见 Taylor 和 Tricot 1985), 故

$$0 \le \dim E \le \text{Dim}E \le N. \tag{4.6.9}$$

对每一 $\varepsilon > 0$ 和有界集 $E \subset \mathcal{R}^N$, 设 $M(\varepsilon, E)$ 是覆盖 E 的半径为 ε 的球的最少个数，令

$$\delta(E) = \liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{\log M(\varepsilon, E)}{-\log\varepsilon},$$
$$\Delta(E) = \limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{\log M(\varepsilon, E)}{-\log\varepsilon}.$$

δ 和 Δ 分别称为 Kolmogorov 上熵和下熵指数. Tricot (1982) 证明了

$$\text{Dim } E = \widehat{\Delta}(E) := \inf\Big\{\sup\Delta(E_i) : E \subset \bigcup_i E_i\Big\}. \tag{4.6.10}$$

下面是有关指数为 α 的 (N,d) Gauss 场 $X(t)$ 的像 $X(E) = \{X(t) : t \in E\}$ 和图 $Gr\,X(E) = \{(t, X(t)) : t \in E\}$ 的 Hausdorff 维数的结果，其中 E 是 $\mathcal{R}^N$ 中的任一紧集.

定理 4.6.4 设 $X(t)$ 是一个指数为 α 的 (N,d) Gauss 场. 其中 α 的坐标分量满足

$$0=\alpha_0<\alpha_1\leq\cdots\leq\alpha_d\leq 1$$

且设 $E\subset\mathcal{R}^N$ 是一紧集. 若对任何 $(s,t)\in E\times E$ (4.6.7) 成立, 则概率为 1 地有

$$\dim X(E)=\min\left\{d;\frac{\dim E+\sum_{i=1}^{j}(\alpha_j-\alpha_i)}{\alpha_j},1\leq j\leq d\right\}$$

$$=\begin{cases}(\dim E+\sum\limits_{i=1}^{k}(\alpha_k-\alpha_i))/\alpha_k, & \text{当 } \sum\limits_{i=0}^{k-1}\alpha_i\leq\dim E\leq\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i \text{ 时},\\ d, & \text{当 } \dim E>\sum\limits_{i=1}^{d}\alpha_i \text{ 时},\end{cases}\tag{4.6.11}$$

$$\dim GrX(E)$$

$$=\min\left\{\frac{\dim E+\sum_{i=1}^{j}(\alpha_j-\alpha_i)}{\alpha_j},1\leq j\leq d;\ \dim E+\sum_{i=1}^{d}(1-\alpha_i)\right\}$$

$$=\begin{cases}\dim X(E), & \text{当 } \dim X(E)<d \text{ 时},\\ \dim E+\sum\limits_{i=1}^{d}(1-\alpha_i), & \text{当 } \dim X(E)=d \text{ 时}.\end{cases}\tag{4.6.12}$$

若 $E=[0,1]^N$, 我们有下述定理.

定理 4.6.5 设 $X(t)$ 是定理 4.6.4 中定义的 (N,d) Gauss 场, 若对所有的 $s,t\in[0,1]^N$, (4.6.7) 成立, 那么概率为 1 地

$$\dim X([0,1]^N)$$

$$=\operatorname{Dim}X([0,1]^N)=\min\left\{d;\frac{N+\sum_{i=1}^{j}(\alpha_j-\alpha_i)}{\alpha_j},1\leq j\leq d\right\},$$

$$\dim GrX([0,1]^N)=\operatorname{Dim}GrX([0,1]^N)$$

$$=\min\left\{N+\sum_{i=1}^{d}(1-\alpha_i);\frac{N+\sum_{i=1}^{j}(\alpha_j-\alpha_i)}{\alpha_j},1\leq j\leq d\right\}.$$

注 4.6.1 当 $[0,1]^N$ 被任一具有非空的内部的紧集 E 代替时，定理 4.6.5 仍成立.

4.6.3 l^p 值 Gauss 过程增量的分形性质

设 $\{W(t); t \geq 0\}$ 是标准 Wiener 过程. 由重对数律知

$$\limsup_{h\to 0} \frac{|W(t+h)-W(t)|}{(2h\log\log h^{-1})^{1/2}} = 1 \quad \text{a.s.}, \quad \forall t \in [0,1].$$

另一方面，由 Lévy 连续模定理 (定理 0.1) 知

$$\lim_{h\to 0} \sup_{t\in[a,b]} \frac{|W(t+h)-W(t)|}{(2h\log h^{-1})^{1/2}} = 1 \quad \text{a.s.}, \quad \forall 0 \leq a < b \leq 1.$$

我们还可以证明

$$\sup_{t\in[a,b]} \limsup_{h\to 0} \frac{|W(t+h)-W(t)|}{(2h\log h^{-1})^{1/2}} = 1 \quad \text{a.s.}, \quad \forall 0 \leq a < b \leq 1. \tag{4.6.13}$$

它说明：对任何 $0 < \alpha < 1$, a.s. 地存在 $t \in [a,b]$ 使得

$$\limsup_{h\to 0} \frac{|W(t+h)-W(t)|}{(2h\log h^{-1})^{1/2}} \geq \alpha.$$

由 a 和 b 的任意性知：存在许多 (至少可数个) $t \in [0,1]$ 使上式成立. 人们自然要研究这样的 t 组成的集合的性质. Orey 和 Taylor (1974) 研究了集合

$$B(\alpha) := \left\{ t \in [0,1] : \limsup_{h\to 0} \frac{|W(t+h)-W(t)|}{(2h\log h^{-1})^{1/2}} \geq \alpha \right\} \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$$

的分形性质. 他们证明了，对每一 $0 \leq \alpha \leq 1$, $B(\alpha)$ 是随机分形，并证明了：

定理 4.6.6 对任给的 $\alpha \in [0,1]$，概率为 1 地有

$$\dim B(\alpha) = 1 - \alpha^2. \tag{4.6.14}$$

如上所述，这一结果对应于 Wiener 过程的重对数律和 Lévy 连续模. 在第二章和第三章中已指明许多 Gauss 过程有着类似于 Wiener 过程的连续模. 例如，在第三章中我们研究了 l^p 值 Gauss 过程的增量, 定理 3.3.3, 3.3.4 给出了 l^p 值 Gauss 过程的连续模. 形如 (4.6.14) 的分形性质是怎样的呢？ Deheuvels 和 Mason (1994, 1995) 也研究了具有独立增量的过程和经验过程的分形性质. 但他们的方法不能用来研究具有相依增量的 Gauss 过程.

设 $\{Y(t), -\infty < t < \infty\} = \{X_k(t), -\infty < t < \infty\}_{k=1}^{\infty}$ 是独立 Gauss 过程序列， $EX_k(t) = 0$ 且有平稳增量 $\sigma_k^2(h) = E(X_k(t+h) - X(t))^2$, 这里总设 $\sigma_k(h)$ 是非降连续函数. 回顾前面的记号:

$$\sigma(p,h) = \Big(\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^p(h)\Big)^{1/p}, \qquad \sigma^*(h) = \max_{k\ge 1}\sigma_k(h),$$

$$\tilde\sigma(p,h) = \begin{cases} \sigma\big(\dfrac{2p}{2-p}, h\big), & \text{若 } 1\le p<2, \\ \sigma^*(h), & \text{若 } p\ge 2, \end{cases}$$

$$\delta_p^p = E|N(0,1)|^p, \quad p\ge 1.$$

若定理 3.3.4 的条件被满足，那么我们有

$$\begin{aligned}
&\limsup_{h\to 0}\inf_{0\le t\le 1}\frac{\|Y(t+h)-Y(t)\|_{l^p}}{\delta_p\sigma(p,h)} \\
\ge &\limsup_{h\to 0}\min_{0\le n\le h^{-2}}\frac{\|Y(nh^2+h)-Y(nh^2)\|_{l^p}}{\delta_p\sigma(p,h)} \\
&-2\limsup_{h\to 0}\sup_{0\le t\le 2}\sup_{0\le s\le h^2}\frac{\|Y(t+s)-Y(t)\|_{l^p}}{\delta_p\sigma(p,h^2)}\cdot\frac{\sigma(p,h^2)}{\sigma(p,h)} \\
= &\limsup_{h\to 0}\min_{0\le n\le h^{-2}}\frac{\|Y(nh^2+h)-Y(nh^2)\|_{l^p}}{\delta_p\sigma(p,h)}. \qquad (4.6.15)
\end{aligned}$$

类似于 (3.3.33) 的证明，对任何 $1<\theta<2$, 当 h 充分小时我们有

$$\begin{aligned}
&P\Big\{\min_{0\le n\le h^{-2}}\frac{\|Y(nh^2+h)-Y(nh^2)\|_{l^p}}{\delta_p\sigma(p,h)}\le 2-\theta\Big\} \\
&\le 2(h^{-2}+1)\exp\Big(-\frac{(\theta-1)^2\delta_p^2\sigma^2(p,h)}{8\,\tilde\sigma^2(p,h)}\Big) \\
&\le 4h^{-2}\exp\Big(-4\log\frac{1}{h}\Big) = 4h^2\to 0 \quad h\to 0,
\end{aligned}$$

它与 (4.6.15) 一起可推出

$$\limsup_{h\to 0}\inf_{0\le t\le 1}\frac{\|Y(t+h)-Y(t)\|_{l^p}}{\delta_p\sigma(p,h)}\ge 1 \quad \text{a.s.}$$

从而，如果我们定义一个类似于 $B(\alpha)$ 的随机集合：

$$E(\alpha)=\left\{t\in[0,1]:\limsup_{h\to 0}\frac{\|Y(t+h)-Y(t)\|_{l^p}}{\delta_p\sigma(p,h)}\ge\alpha\right\},\quad 0\le\alpha\le 1,$$

则对任何 $0\le\alpha\le 1$ 有 $E(\alpha)=[0,1]$ a.s. 因此这时 $E(\alpha)$ 的分形没有什么需要我们考察的.

现在，假设定理 3.3.3 中的条件被满足，并定义类似于 $B(\alpha)$ 的随机集

$$E(\alpha)=\left\{t\in[0,1]:\limsup_{h\to 0}\frac{\|Y(t+h)-Y(t)\|_{l^p}}{\tilde\sigma(p,h)(2\log h^{-1})^{1/2}}\ge\alpha\right\},\quad 0\le\alpha\le 1. \tag{4.6.16}$$

Zhang (1997d) 得到了关于 $E(\alpha)$ 的 Hausdorff 维数的下述结果.

定理 4.6.7 假设对某个 $\Lambda>0$, 在 $[0,\Lambda]$ 上 $\tilde\sigma(p,h)/h^\Lambda$ 是拟增的. 又设

$$\sigma(p,h)=o(\tilde\sigma(p,h)(\log h^{-1})^{1/2}),\qquad h\to 0, \tag{4.6.17}$$

且对每一 $\epsilon>0$

$$\limsup_{h\to 0}\max_{h^{-\epsilon}\le j\le h^{-1}}\max_{k\ge 1}\frac{E(X_k(h)-X_k(0))(X_k((j+1)h)-X_k(jh))}{(\log h^{-1})^{-2}\sigma_k^2(h)}\le 0.$$

那么对任何 $\alpha\in[0,1]$, 概率为 1 地有

$$\dim E(\alpha)=1-\alpha^2.$$

对随机集合

$$E^*(\alpha)=\left\{t\in[0,1]:\limsup_{h\to 0}\frac{\|Y(t+h)-Y(t)\|_{l^p}}{\tilde\sigma(p,h)(2\log h^{-1})^{1/2}}=\alpha\right\},\quad 0\le\alpha\le 1, \tag{4.6.18}$$

我们有下述结果:

定理 4.6.8 假设对某个 $\Lambda > 0$, 在 $[0, \Lambda]$ 上 $\tilde{\sigma}(p, h)/h^{\Lambda}$ 是拟增的. 又设 (4.6.17) 成立, 且对某个 $P > 0$

$$\limsup_{h\to 0} \max_{(\log h^{-1})^P \le j \le h^{-1}} \max_{k\ge 1} \Big[E(X_k(h) - X_k(0))(X_k((j+1)h) \\ -X_k(jh))\Big] \Big/ \Big[(\log h^{-1})^{-2}\sigma_k^2(h)\Big] \le 0.$$

那么对任何 $\alpha \in [0, 1]$, 概率为 1 地有

$$\dim E^*(\alpha) = 1 - \alpha^2.$$

作为定理 4.6.8 的推论, 我们可以得到关于 l^p 值分数 O-U 过程和分数 O-U 过程的无穷级数的分形结果.

4.6.4 Ornstein-Uhlenbeck 过程的无穷级数的增量与 Chung 重对数律有关的分形性质

设 $\{W(t); t \ge 0\}$ 是标准 Wiener 过程. Orey 和 Taylor (1974) 也研究了集合

$$B_1(\alpha) := \Big\{t \in [0, 1] : \liminf_{h\to 0} \Big(\frac{8\log h^{-1}}{\pi^2 h}\Big)^{1/2} \\ \cdot \sup_{0\le s\le h} |W(t+s) - W(t)| \le \alpha\Big\} \quad (\alpha \ge 1)$$

的分形性质. 他们证明了对每一 $\alpha \ge 1$, $B_1(\alpha)$ 是随机分形且有

定理 4.6.9 对任给的 $\alpha \ge 1$, 概率为 1 地有

$$\dim B_1(\alpha) = 1 - \alpha^{-2}.$$

这一结果是对应于 Chung 型重对数律和不可微模的. 在本章的前几节中, 已介绍过对一大类 Gauss 过程, Chung 型重对数律成立. 例如定理 4.2.5 和 4.4.6 分别给出了 O-U 过程的无穷级数的

Chung 型重对数律和精确不可微模. 现在, 我们将对这类过程建立类似于定理 5.4.1 的分形性质.

设 $\{Y(t); -\infty < t < \infty\} = \{X_k(t); -\infty < t < \infty\}_{k=1}^{\infty}$ 是独立 O-U 过程序列, 具有系数 γ_k 和 λ_k. 假设 $\{X(t); -\infty < t < \infty\} = \{\sum_{k=1}^{\infty} X_k(t); -\infty < t < \infty\}$ 是 $\{Y(t); -\infty < t < \infty\}$ 的无穷级数. 令

$$\Gamma_0 = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\lambda_k} < \infty, \quad \Gamma_1 = 2\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k > 0,$$

$$\sigma^2(h) = E(X(t+h) - X(t))^2 = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\lambda_k}(1 - e^{-\lambda_k h}).$$

我们定义一个类似于 $B_1(\alpha)$ 的随机集合

$$E_1(\alpha) := \left\{ t \in [0,1] : \liminf \left(\frac{8 \log h^{-1}}{\pi^2 \sigma^2(h)} \right)^{1/2} \cdot \sup_{0 \le s \le h} |X(t+s) - X(t)| \le \alpha \right\} \quad (\alpha \ge 1).$$

Zhang (1998) 证明了下述定理:

定理 4.6.10 假设 $\Gamma_1 = 2\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k < \infty$. 则对任一 $\alpha \ge 1$, 概率为 1 地有

$$\dim E_1(\alpha) = 1 - \alpha^{-2}.$$

参 考 文 献

王梓坤 (1983) 两参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程, 数学物理学报, **3**, 395—406.

王文胜 (1997) 一类 Gauss 过程增量的一般形式, 杭州大学学报, **24**, 204—208.

(2001) 两参数 Wiener 过程增量的 Strassen 型定理, 数学年刊, **22A**, 27—34.

孔繁超 (1987) 两参数 Wiener 过程增量的若干结果, 应用概率统计, **3**, 144—150.

刘坤会 (1987) 一个与 Wiener 过程增量连续模有关的下极限收敛速度问题, 中国科学, **17**, 1121—1129.

肖益民 (1992), 两参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程的像集的一些性质, 数学杂志, **12**, 237—240.

陈雄 (1989) 两参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程图集及象集的 Hausdorff 维数, 数学学报, **32**, 433—438.

陆传荣 (1986) 关于 Gauss 过程增量的若干结果, 应用概率统计, **2**, 59—65.

(1991) 两参数 Wiener 过程的增量有多小? 数学学报, **34**, 252—259.

陆传荣, 张立新, 王尧弘 (2001) 两参数分数 Wiener 过程的大增量, 中国科学, **31**, 422—432.

邵启满 (1986) 关于 Wiener 过程增量的注记, 数学杂志, **6**, 175—182.

林正炎 (1984) 两参数 Wiener 过程增量有多大, 中国科学, **14**, 1065—1073.

(1991) 两参数带核 Gauss 过程, 数学学报, **34**, 12—26.

(1991) 一类由无穷维 O-U 过程生成的过程的轨道性质, 数学年刊, **12A**, 249—253.

(1996a) 由 Ornstein-Uhlenbeck 过程产生的 l^2 模平方过程的增量, 科学通报, **41**, 6—10.

(1996b) l^p- 值 Gauss 过程的增量有多大, 中国科学, **26**, 873—883.

林正炎, 陆传荣 (1992) 强极限定理, 科学出版社.

林正炎, 张立新 (1999) Gauss 过程的增量与轨道性质, 科学通报, **44**,1346—1355

洪圣岩 (1990) 关于 Gauss 过程增量的若干结果, 数学学报, **11A**, 137—146.

张立新 (1995) Ornstein-Uhlenbeck 过程无穷级数的精确不可微模, 数学年刊, **16A**, 263—268.

(1997c) 两参数 Wiener 过程增量的一个下极限, 数学年刊, **18 A**, 235—246.

Adler, R. J. (1981) *The Geometry of Random Fields.* Wiley, New York.

(1990) *An Introduction to Continuity, Extrema, and Related Topics for General Gaussian Processes.* IMS Lect. Notes-Monograph Series, **12**.

Adler, R. J., Pyke, R.(1993) Uniform quadratic variation for Gaussian processes. *Stochastic Processes their Appl.* **30**, 191—209.

Anderson, T. W. (1995) The integral of a symmetric unimodal function over a symmetric convex set and some probability inequalities. *Proc. Amer. Math. Soc.* **6**, 170—176.

Antoniadis, A., Camona, R. (1987) Eigenfunction expansions for infinite dimensional Ornstein-Uhlenbeck processes. *Probab. Theory Rel. Fields,* **74**, 31—54.

Bass, R. F. (1988) Probability estimates for multiparameter Brownian processes. *Ann. Probab.* **16**, 254—264.

Berman, S. M. (1969) Local times and sample function properties of stationary Gaussian processes. *Trans. Amer. Math. Soc.* **137**, 277—299.

(1972) Gaussian sample function: uniform dimension and Hölder conditions nowhere. *Nagoya Math. J.* **46**, 63—86.

(1974) Local nondeterminism and local times of Gaussian processes. *Indiana Math. J.* **23**, 69—94.

(1991) *Sojourns and Extremes of Stochastic Processes.* Wadsworth & Books/ Cole Advanced Books & Software, California.

Besicovith, A. S., Taylor, S. J.(1954) On the complementary intervals of a linear closed set of zero Lebesgue measure. *J. London Math. Soc.* **29**, 449—459.

Bolthausen, E. (1978) On the speed of convergence in Strassen's LIL. *Ann. Probab.* **6**, 668—672.

Bonnosen, T., Fenchel, W.(1948) *Theorie der Konvexen Kórper.* New York, Chelsea.

Borell, C.(1975) The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space. *Invent. Math.* **30**, 205—216.

Carmona, R.(1977) Measurable norms and some Banach space valued Gaussian processes. *Duke Math. J.* **44**, 109—127.

Chen B. (陈斌) (1998) Ph. D. Dissertation. Carleton University, Ottawa, Canada.

Chen G. J. (陈桂景), Kong, F. (孔繁超), Lin, Z. Y. (林正炎)

(1986) Answers to some questions about increments of a Wiener process. *Ann. Probab.* **14**, 1252—1261.

Choi, Y. K., Lin, Z. Y.(1998) A version of Fernique lemma for Gaussian processes. *East Asian Math. J.* **14**, 99—106.

Chung, K. L. (钟开莱)(1948) On the maximum partial sums of sequences of independent random variables. *Trans. Amer. Math. Soc.* **64**, 205—233.

Csáki, E., Csörgő, M., Fóldes, A., Révész, P.(1983) How big are the increments of the local time of a Wiener process? *Ann. Probab.* **11**, 593—608.

Csáki, E., Csörgő, M., Lin, Z. Y., Révész, P.(1991) On the infinite series of independent Ornstein-Uhlenbeck processes. *Stochastic Processes their Appl.* **39**, 25—44.

Csáki, E., Csörgő, M., Shao, Q. M. (邵启满)(1992) Fernique type inequalities and moduli of continuity for l^2-valued Ornstein-Uhlenbeck processes. *Ann. Inst. Henri. Poincaré Probab. Statist.* **28**, 479—517.

(1995) Moduli of continuity for l^p-valued Gaussian processes. *Acta Sci. Math.* **60**, 149—175.

Csáki, E., Révész, P. (1979) How big must be the increments of Wiener process? *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **33**, 37—49.

Csáki, E., Shi, Z. (1998) Some liminf resluts for two-parameter processes. *Stochastic Processes their Appl.* **78**, 27—46.

Csörgő, M., Lin, Z. Y.(1990) On moduli of continuity for Gaussian and l^2-norm squared processes generated by Ornstein-Uhlenbeck processes. *Canad. J. Math.* **17**, 141—158.

(1991) Path properties of kernel generated two-time parameter Gaussian processes. *Probab. Theory Rel. Fields*, **89**, 423—444.

Csörgő, M., Lin, Z. Y., Shao, Q. M. (1994a) Path properties for l^∞-valued Gaussian processes. *Proc. Amer. Math. Soc.* **121**, 225—236.

(1994b) Kernel generated two-time parameter Gaussian processes and some of their path properties. *Canad. J. Math.* **46**, 81—119.

(1995) On moduli of continuity for local times of Gaussian processes. *Stochastic Processes their Appl.* **58**, 1—21.

Csörgő, M., Révész, P.(1978) How big are the increments of a multi-parameter Wiener process? *Z. Wahrch. verw Gebiete*, **42**, 1—12.

(1981) *Strong Approximations in Probability and Statistics.* Academic Press, New York.

Csórgő, M., Shao, Q. M.(1992) Fernique type inequalities and moduli of continuity for l^2-valued Ornstein-Uhlenbeck processes.*Ann. Inst. Henri Poincarés et Statistiques*, **28**, 417—519.

(1993) Strong limit theorems for large and small increments of l^p-valued Gaussian processes.*Ann. Probab.* **21**, 1958—1990.

(1994) On almost sure limit inferior for B-valued stochastic processes and applications.*Probab. Theory Rel. Fields*, **99**, 29—54.

Cuzick, J. (1978) Some local properties of Gaussian vector fields.*Ann. Probab.* **6**, 984—994.

(1981) Multiple points of a Gaussian vector field. *Z. Wahrsch. verw Gebiete*, **61**, 431—436.

Daprato, G., Kwapien, S., Zabcyk, J.(1987) Regularity of solutions of linear stochastic equations in Hilbert space.*Stochastic* **23**, 1—23.

Dawson, D. A.(1972) Stochastic evolution equations. *Math. Biosciences*, **15**, 287—316.

(1975) Stochastic evolutions and related measure processes. *J. Multivariate Anal.* **5**, 1—52.

Deheuvels, P., Mason, P.(1994) Random fractals generated by oscillations of processes with stationary and independent increments. In *Probability in Banach Spaces* **9** (J. Hoffman- Jϕrgensen, J. Kuelbs and M.B. Marcus, eds.) 73—90. Birkháuser, Boston.

(1995) On the fractal nature of empirical increments. *Ann. Probab.* **23**, 355—387.

De La Vega, F. W.(1974) On almost sure convergence of quadratic Brownian motion. *Ann. Probab.* **2**, 551—552.

Dudley, R. M.(1973) Sample functions of the Gaussian process. *Ann. Probab.* **1**, 66—103.

Ehm, W.(1981) Sample function properties of multi-parameter stable processes. *Z Wahrsch. verw Gebiete*, **56**, 195—228.

Ehrhard, A.(1983) Symétrisation das l'espace de Gauss. *Math. Scand.* **53**, 281—301.

(1984) Inégalités isopérimétriques et intégrales de Dirichlet Gaussiennes. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* **17**, 317—332.

(1986) Eléments extrémaux pour les inégalités de Brunn-Minkowski

Gaussiennes.*Ann. Inst. H. Poincaré*, **22**, 149—168.

Erdös. P., Révész, P.(1990) A new law of iterated logarithm. *Acta Math. Hungar.* **55**, 125—131.

Falconer, K. J. (1985) *The Geometry of Fractal Sets.* London: Cambridge Univ. Press.

(1990) *Fractal Geometry-Mathematical Foundation and Applications.* Wiley, New York.

Fernique, X.(1964) Continuité des processus Gaussiens. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **258**, 6059—6060.

(1975) Regularité des trajectories des fonctions aléatoires Gaussiennes. *Lect. Notes in Math.* **480**, 1—96. Springer Verlag.

(1978) Caractérisation des processus á trajectoires majorées ou continues. *Lect. Notes in Math.* **649**, 691—706. Springer Verlag.

(1983) Régularté de fonctions aléatoires non Gaussiennes. Ecole d'Eté de Pro babilités de St-Flour 1981. *Lect. Notes in Math.* **976**, 1—74. Springer Verlag, New York.

(1989) La regularté des fonctions aléatoires d'Ornstein-Uhlenbeck á valeurs dans l^2; le cas diagonal. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **309**, 59—62.

(1990a) Régularité de fonctions aléatoires Gaussiennes á valeurs vectorielles. *Ann. Probab.* **18**, 1739—1745.

(1990b) Sur la régularité de certaines fonctions aléatoires d'Ornstein-Uhlenbeck. *Ann. Inst. H. Poincaré. Probab. Statist.* **26**, 399—417.

Fukushima, (1980) On a representation of local martingale additive functionals of symmtric diffusions. Stochastic integrals (Proc. Sympos., Univ. Durham, Durham), 110—118, *Lect Notes in Math.*, **851**, Springer-Verlag, 1981.

Geman, D.(1976) A note on the continuity of local times. *Proc. Amer. Math. Soc.* **57**, 321—326.

Giné, E., Klein, R.(1975) On quadratic variation of processes with Gaussian increments. *Ann. Probab.* **3**, 716—721.

Goldman, A.(1981) Points multiples des trajectories de processus Gaussiens. *Z. Wahrsch. verw Gebiete*, **57**, 481—494.

Goodman, V., Kuelbs, J. (1988) Rates of convergence for increments of Brownian motion. *J. Theor. Probab.* **1**, 27—63.

(1991a) Rates of clustering for some Gaussian self-similar processes. *Probab. Theory Rel. Fields*, **88**, 47—75.

(1991b) Rates of clustering in Strassen's LIL for Brownian motion. *J. Theor. Probab.* **4**, 285—309.

Gordon, Y.(1985) Some inequalities for Gaussian processes and applications. *Isral J. Math.* **50**, 265—289.

Grill, K.(1987) On the rate of convergence in Strassen's LIL. *Probab. Theory Rel. Fields*, **74**, 583—589.

(1991) A liminf result in Strassen's law of the iterated logarithm. *Probab. Theory Rel. Fields*, **89**, 149—157.

Gross, L.(1977) On the formula of Mathews and Salam. *J. Funct. Anal.* **25**, 162—209.

Das Gupta, S., Eaton, M., Olkin, I., Perlman, M., Savage, L., Sobel, M. (1972) Inequalities on the probability content of convex regions for elliptically contoured distributions. *Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Probab.* **3**, 241—264.

Hanson, D.L., Russo, Ralph. P.(1983a) Some results on increments of the Wiener process with applications to lag sums of i.i.d.r.v.'s. *Ann. Probab.* **11**, 609—623.

(1983b) Some more results on increments of a Wiener process. *Ann. Probab.* **11**, 1009—1015.

(1989) Some "Lim inf" results for increments of Wiener process. *Ann. Probab.* **17**, 1063—1082.

Hargé, G.(1998) Une inégalité de décorrélation pour la mesure gaussienne. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér.* **326**, 1325—1328.

Hawkes, J.(1971) A lower Lipschitz condition for the stable subordinator. *Z. Wahrsch. verw Gebiete*, **17**, 23—32.

Holley, R., Stroock, D.(1978) Generalized Ornstein-Uhlenbeck processes and infinite particle branching Brownian motions. *Publ. RIMS Kyoto Univ.* **14**, 741—788.

Iscoe, I., Marcus, M., Mcdonald, D., Talagrand, M., Zinn, J. (1990) Continuity of l^2-valued Ornstein-Uhlenbeck processes. *Ann. Probab.* **18**, 68—84.

Itô, K. (1984) Foundations of Stochastic Differential Equations on Infinite Dimensional Spaces.*Cbmsnsf Reg. Conf. Ser. in Appl. Math.* No. **47** (SIAM, Philadelphia, PA).

Jain, N., Monrad, D. (1983) Gaussian measures in B_p.*Ann. Probab.* **11**, 46—57.

Kahane, J-P. (1985) *Some Random Series of Functions.* 2nd. ed. Cambridge Univ. Press.

(1986) Une inegalie du type de Slepian et Gordon sur les processus Gaussiens. *Isral J. Math.* **55**, 109—110.

Kallianpur, G., Wolpert, R. (1984) Infinite dimensional stochastic differential equation models for spatially distributed neurons.*J. Appl. Math. Optim.* **12**, 125—172.

Kawata, T., Kôno, N. (1973) On the variation of Gaussian processes. Proceedings of the Second Japan-USSR Symposium Probability Theory.*Lect. Notes in Math.* **330**, 175—192. Springer-Verlag.

Kesten, H. (1965) An iterated logarithm law for local time. *Duke Math. J.* **32**, 447—456.

Khatri, C. G. (1967) On certain inequalities for normal distributions and the applications to simultaneous confidence bounds.*Ann. Math. Statist.* **38**, 1853—1867.

Kôno, N. (1969) Oscillation of sample functions in stationary Gaussian processes. *Osaka J. Math.* **6**, 1—12.

(1976) Evolution asymptotique des temps d'arrêt des temps de séjour liés aux trajectoires de certains fonctions aléatires Gaussiennes.*Lect. Notes Math.* **550**, 290—296, Springer-Verlag.

(1997) Hölder conditions for the local times of certain Gaussian processes with stationary increments.*Proc. Japan Acad.* **53**, Ser. A., 84—87.

Kotelenez, P. (1987) A maximal inequality for stochastic integrals on Hilbert spaces and space-time regularity of linear stochastic partial differential equations,*Stochastic* **21**, 345—358.

Kuelbs, J. (1976) The law of the iterated logarithm and related strong convergence theorem for Banach space valued random variables.*Lect. Notes Math.* **539**, 224—314. Springer-Verlag.

Kuelbs, J., Li, W. V. (李文波), Shao, Q. M.

(1995) Small ball probabilities for Gaussian processes with stationary increments under Hölder norm. *J. Theor. Probab.* **8**, 361—386.

Kuelbs, J., Li, W. V., Talagrand, M. (1994) Lim inf results for Gaussian sample and Chung's functional LIL. *Ann. Probab.* **22**, 1879—1903.

Kuo, H. H. (1975) Gaussian measures in Banach spaces, *Lect. Notes in Math.* **463**. Springer-Verlag.

Lacey, M. T. (1989) A remark on the multiparameter law of the iterated logarithm. *Stochastic Processes their Appl.*, **32**, 335—367.

Leadbetter, M. R., Lindgren, G., Rootzen, H. (1983) *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes.* Springer Verlag, New York.

Ledoux, M., Talagrand, M.(1991) *Probability in Banach Spaces - Isoperimetry and Processes.* Spriger-Verlag, New York.

Lévy, P. (1937) *Théorie de l'addition des variables aléatoires.* Gauthier-Villars, Paris.

(1940) Le Mouvement brownien plan.*Amer. J. Math.* **62**, 487—550.

(1948) *Procesus stochastique et mouvement Browniew.* Gauthier-Villars, Paris.

(1953) La mesure de Hausdorff de la courbe du mouvement broenien. *Giom. Ist. Ist. Ital. Attuari*, **16**, 1—37.

Li, W. V.(1999) A Gaussian correlation inequality and its applications to small ball probabilities.*Electronic Commun. In Probab.* to appear.

Li, W. V., Linde, W. (1998) Existence of small ball constants for fractional Brownian motions.*C. R. Acad. Sci. Paris*, **326**, 1329—1334.

Li, W. V., Shao, Q. M. (1991) Small ball estimates for Gaussian processes under Sobolev type norms. (preprint).

(1999) Gaussian processes: inequality, small ball probabilities and applications. Stochastic processes: Theory and methods, Handbook of Statistics, vol. 19, Edited by C.R.Rao and D.Shanbhag.

Lin, Z. Y. (1995a) On moduli of continuity for a two-parameter Ornstein-Uhlenbeck process. *Acta Math. Hungar.* **66**, 345—360.

(1995b) On large increments of a two-parameter O-U process. *Acta Math. Sinica, New Series,* **11**, Special Issue, 59—68.

(1995c) On large increments of infinite series of Ornstein-Uhlenbeck processes. *Stochastic Processes their Appl.* **60**, 161—169.

(1995d) On moduli of non-differentiability of a two-parameter O-U process. *Acta Math. Scientia,* **16**, Supp. 85—91.

(1997) On large increments of l^p-valued Gaussian processes. *Chin. Ann. Math.* **18B**, 213—222.

(1998) On large increments of l^∞-valued Gaussian processes. In: *Asymptotic Methods in Probability and Statistics,* A Volume of Honour of Miklós Csörgő. The Proceeding Volume of ICAMPS'97. (B. Szyszkowicz, Ed). Elsevier Science B. V., Amsterdam.

(2001) Path properties of the primitives of a Brownian motion, *J. Austral. Math. Soc.* 70, 119—133.

Lin, Z. Y., Choi, Y. K.(1999) Some limit theorems for fractional Lévy-Brownian fields. *Stochastic Processes their Appl.* **82**, 229—244.

(2001) Some limit theorems on the increments of a multi-parameter fractional Brownian motion, *Stoch.Anal.Appl.* **19**, 499—517

Lu, C. R. (陆传荣), Wang, Y. H. (王尧弘)(2000) Another version of continuity moduli for two classes of Gaussian processes. *Appl. Math.-JCU.* **15B**, 161—166

Lu, C. R., Yu, H. (于浩) (1997) On Chung's law of iterated logarithm for a two-parameter Ornstein- Uhlenbeck Process. (Preprint).

Lu, C. R., Wei, Q. C. (危启才) (1994) How big are the increments of an l^∞-valued Gaussian process. *Chin. J. of Contemporary,* **15**, 1—12.

Mandelbrot, B. B., Van, Ness, J. W.(1968) Fractional Brownian motion, fractional noise and applications. *SIAM Rev.* **10**, 422—437.

Marcus, M. B. (1968) Gaussian process with stationary increments possessing discontinuous sample paths. *Pacific J. Math.* **26**, 149—157.

Marcus, M. B., Rosen, J. (1992a) Sample path properties of the local times of strongly symmetric Markov processes via Gaussian processes. *Ann. Probab.* **20**, 1603—1684.

(1992b) p-Variation of the local times of symmetric stable processes and of Gaussian processes with stationary increments. *Ann. Probab.* **20**, 1685—1713.

Miyahara, Y. (1981) Infinite dimensional Langevin equation and Fokker-Planck equation. *Nagoya Math. J.* **81**, 177—223.

Monrad, D., Rootzen, H. (1995) Small values of Gaussian processes and functional laws of the iterated logarithm. *Probab. Theory Rel. Fields*, **101**, 173—192.

Móricz, F. (1982) A general moment inequality for the maximum of partial sums of single series. *Acta Sci. Math.* **44**, 67—75.

Oodaira, H. (1972) On Strassen's version of the law of the iterated logarithm for Gaussian processes. *Z. Wahrsch. verw Gebiete*, **21**, 289—299.

Orey, S., Taylor, S. T. (1974) How often on a Brownian path does the iterated logarithm fail? *Proc. London Math. Soc.* **28**, 174—192.

Ortega, J. (1984) On the size of the increments of non-stationary Gaussian processes. *Stochastic Processes their Appl.* **18**, 47—56.

Oualls, C., Watanabe, H. (1972) Asymptotic properties of Gaussian processes. *Ann. Math. Statist.* **43**, 580—596.

(1973) Asymptotic properties of Gaussian random fields. *Trans. Amer. Math. Soc.* **177**, 155—171.

Perkins, E. (1981) The exact Hausdorff measure of the level sets of Brownian motion. *Z. Wahrsch. verw Gebiete*, **58**, 373—388.

Petrov, V. V. (1995) *Sums of Independent Random Variables.* Springer Verlag, New York.

Pickands, J.III (1969a) Upcrossing probabilities for stationary Gaussian processes. *Trans. Amer. Math. Soc.* **145**, 51—73.

(1969b) Asymptotic properties of the maximum in a stationary Gaussian process. *Trans. Amer. Math. Soc.* **145**, 75—86.

Piech, M. A. (1975) The Ornstein-Uhlenbeck semigroup in an infinite dimensional L^2-setting. *J. Funct. Anal.* **18**, 271—285.

Pisier, G. (1986) Probabilistic methods in the geometry of Banach space. *Lect. Notes Math.* **1206**, 167—241, Springer-Verlag.

Pitt, L. D. (1977) A Gaussian correlation inequality for symmetric convex sets. *Ann. Probab.* **5**, 470—474.

(1978) Local times for Gaussian vector fields. *Indiana Univ. Math. J.* **27**, 309—330.

Pitt, L. D., Tran, L. T. (1979) Local sample path properties of Gaussian fields. *Ann. Probab.* **7**, 477—493.

Price, G. B. (1951) Bounds for determinant with dominant principle. *Proc. Amer. Math. Soc.* **2**, 497—502.

Pruitt, W. E., Orey, S. (1973) Sample functions of the N-parameter Wiener process. *Ann. Probab.* **1**, 138—163.

Révész, P. (1979) A generalization of Strassen's functional laws of the iterated logarithm. *Z. Wahrsch. verw Gebiete* **50**, 257—264.

(1982) On the increments of Wiener and related processes. *Ann. Probab.* **10**, 613—622.

Ricciardi, L. M., Sacerdote, L. (1979) The Ornstein-Uhlenbeck process as a model for neuronal activity. *Biol. Cybernetics*, **35**, 1—9.

Schechtman, G., Schlumprecht, T., Zinn, J. (1998) On the Gaussian measure of the intersection. *Ann. Probab.* **26**, 346—357.

Schmuland, B. (1988a) Moduli of continuity for some Hilbert space Ornstein-Uhlenbeck processes. *C. R. Math. Rep. Acad. Canada*, **10**, 197—202.

(1988b) Some regularity results on infinite dimensional diffusions via Dirichlet forms.*Stochastic Anal. Appl.* **6**, 327—348.

(1990) Sample path properties of l^p-valued Ornstein-Uhlenbeck Processes. *Canad. Math. Bull.* **33**, 358—366.

Shao, Q. M. (1992) An Erdös-Révész type law of the iterated logarithm for stationary Gaussian processes.*Probab. Theory Rel. Fields*, **94**, 119—133.

(1993) A note on small ball probability of Gaussian process with stationary increments.*J. Theor. Probab.* **6**, 595—602.

(1994) On a new law of the iterated logarithm of Erdös and Révész. *Acta Math. Hungar.* **64**, 157—181.

(1995) A Chung type law of the iterated logarithm for subsequences of a Wiener process.*Stochastic Processes their Appl.* **59**, 125—142.

(1996a) Bounds and estimates of a basic constant in extreme value theory of Gaussian processes.*Statistica Sinica*, **7**, 245—257.

(1996b) p-Variation of Gaussian processes with stationary increments. *Studia Sci. Math. Hungar.* **31**, 237—247.

(1999) A Gaussian correlation inequality and its applications to the existence of small ball constant. Preprint.

Shao, Q. M., Wang, D. Y. (1995) Small ball probabilities of Gaussian fields. Probab. *Theory Rel. Fields*, **12**, 511—517.

Sidák, Z. (1968) On multivariate normal probabilities of rectangles: their dependence on correlation. *Ann. Math. Statist.* **39**, 1425—1434.

Slepian, D. (1962) The one-sided barrier problem for Gaussian noise. *Bell System Tech. J.* **41**, 463—501.

Strassen, V. (1964) An invariance principle for the law of the iterated logarithm. *Z. Wahrsch verw Gebiete*, **3**, 211—226.

Strook, D. W. (1981) The Malliavin calculus and its applications to second order parabolic differential equations. *J. Math. Syst. Theory*, **14**, 25—65.

Talagrand, M. (1987) Regularlity of Gaussian processes. *Acta Math.* **159**, 99—149.

(1993) New Gaussian estimates for enlarged balls. *Geometric Funct. Anal.* **3**, 502—520.

(1994) The small ball problem for Brownian sheet. *Ann. Probab.* **22**, 1331—1354.

(1995) Hausdorff measure of trajectores of multiparameter fractional Brownian motion. *Ann. Probab.* **23**, 767—775.

Taylor, S. J. (1986) The measure theory of random fractals. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **100**, 383—406.

Taylor, S. J., Tricot, C. (1985) Packing measure and its evaluation for a Brownian path. *Trans. Amer. Math. Soc.* **188**, 679—699.

Tong, Y. L. (董永良) (1980) *Probability Inequalities in Multivariate Distributions.* Academic, New York.

Tricot, C. (1982) Two definitins of fractional dimension. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **91**, 57—74.

Walsh, J. B. (1981) A stochastic model of neural response. *Adv. Appl. Probab.* **13**, 231—281.

Wang, W. S. (王文胜) (1999a) The exact rates of convergence for functional modulus of continuity of a Wiener process. Preprint.

(1999b) The exact rates of convergence of functional limit theorems for Csörgő-Révész increments of a Wiener process. Preprint.

(2001) On the properties for increments of a local time——a look through the set of limit points, *Stat.&Prob.Lett*, **52**, 329—340.

Wei, Q.C. (危启才) (1999a) Large deviations and functional modulus of continuity for l^p-valued Wiener processes in Hölder norm. Preprint.

(1999b) Functional limit theorems for C-R increments of l^p-valued Wiener processes in Hölder norm. Preprint.

Xiao, Y. M. (肖益民) (1995) Dimension results for Gaussian vector fields and index-α stable fields. *Ann. Probab.* **23**, 273—291.

Zhang, L. X. (张立新) (1996a) Some liminf results on increments of a fractional Brownian motion. *Acta Math. Hungar.* **71**, 209—234.

(1996b) Two different kinds of liminf results on the LIL of the two-parameter Wiener processes. *Stochastic Processes their Appl.* **71**, 215—240.

(1997a) A liminf result for Hanson-Russo type increments of fractional Brownian motions.*Acta Math. Scientia*, **17**, 190—197.

(1997b) A note on liminfs for increments of a fractional Brownian motion. *Acta Math. Hungar.* **76**, 119—129.

(1997d) On the fractal nature of increments of l^p-valued Gaussian processes.*Stochastic Processes their Appl.* **71**, 91—110.

(1998) On the fractal nature of increments of the infinite series of OU processes related to the Chung LIL. *Appl. Math.-JCU.* **13B**, 215—222.

索　引

三画

大偏差　§2.6, §4.1, §4.3

小球概率　§4.0*, §4.2, §4.3

Gauss 过程的 ～　§4.2

Gauss 场的 ～　§4.3

O-U 过程无穷级数的 ～　§4.2

Wiener 单的 ～　§4.3

分数 Wiener 过程的 ～　§4.2

分数 Lévy-Wiener 场的 ～　§4.3

四画

不可微性　§4.4

不可微模　§4.0, §4.4, §4.5, §4.6

不等式

尾概率 ～　§1.0, §1.1, §1.2

指数 ～　§2.5

等周 ～　§1.0, §1.1

Anderson ～　§1.0, §1.2, §4.2, §4.3

Borell ～　§1.0, §1.1, §2.1, §3.1

Brunn-Minkowski ～　§1.0, §1.2

Chebycheff ～　§1.1, §2.7

Fernique ～　§1.0, §1.1, §2.4, §3.1, §4.3

Hölder ～　§3.1, §3.3

Jensen ～　§2.1

Khatri-Šidák ～　§1.0, §1.2, §2.2

Lyapunov ～　§4.6

Marcus ～　§1.2

Minkowski ～　§3.3, §4.3

Slepian ～　§1.0, §1.2, §2.2, §2.5, §2.6, §3.3, §3.4

分形性质　§4.6

分数 Brown 运动　§2.2

分数 Wiener 过程　§2.0, §2.2, §3.3, §4.0, §4.1, §4.2, §4.4, §4.6

～ 的 Chung 重对数律　§4.2

～ 的小球概率估计　§4.2

～ 的精确小球概率估计　§4.2

～ 的连续模　§2.2

～ 的滞后增量　§2.2

～ 的增量　§2.2

～ 的增量一般形式　§2.2

～ 的增量的下极限　§2.2

l^p 值 ～　§3.3

阶为 α 的 ～　§2.2, §2.7, §3.3, §4.1, §4.2, §4.3, §4.6

两参数 ～　§2.3

比较原理　§1.0, §1.2

五画

正则变化　§2.2

正则非增　§2.3

正规距离　§2.1

占有时　§2.7

主测度　§2.1

六画

有界性　§2.1

七画

连续性 §2.0, §2.1, §2.2, §3.1

Gauss 过程的 ～ §2.0, §2.1

l^p 值 Gauss 过程的 ～ §3.1

l^p 值 O-U 过程的 ～ §3.1

l^2 值 O-U 过程的 ～ §3.1

连续模 §2.0, §2.1, §2.2, §2.4, §2.5, §3.1, §3.3, §4.4, §4.6

χ^2 过程的 ～ §3.3

Gauss 过程的 ～ §2.0, §2.1, §2.2

l^∞ 值 ～～ §3.4

l^p 值 ～～ §3.3, §4.6

无穷维 ～～ §3.0

两参数 ～～ §2.6

Lévy ～ §2.2, §4.4, §4.6

l^p 值分数 O-U 过程的 ～ §3.3, §4.6

l^p 值分数 Wiener 过程的 ～ §3.3

O-U 过程的 ～§2.2

O-U 过程无穷级数的 ～ §2.2, §4.6

分数 Wiener 过程的 ～ §2.0, §2.2

泛函 ～ §4.1

两参数 O-U 过程的 ～ §2.5

两参数 Wiener 过程的 ～ §2.3

两参数分数 Lévy-Wiener 过程的 ～ §2.4

局部时的 ～ §2.7

拟连续函数 §3.1

拟降函数 §2.2

拟增函数 §2.2, §2.3, §3.2, §3.3, §3.4, §4.4, §4.6

局部时 §2.0, §2.7

九画

重对数律 §2.7, §4.0, §4.1, §4.6

Erdös-Révész ～ §4.0, §4.1

Chung ～ §2.2, §4.0—§4.6

Gauss 过程的 ～～ §4.0, §4.2

Gauss 场的 ～～ §4.3

O-U 过程无穷级数的 ～～ §4.2, §4.3, §4.6

分数 Wiener 过程的 ～～ §4.2

泛函型 ～～ §4.1, §4.2

两参数 O-U 过程的 ～～ §4.5

两参数 Wiener 过程的 ～～ §4.5

Lacey 型 ～ §4.5

Strassen 泛函 ～ §4.0, §4.1

十一画

随机分形 §4.6

距离熵 §2.1

十四画

谱表示 §4.2, §4.3

谱测度 §4.2, §4.3

谱密度 §4.3

十五画

增量 §2.0, §2.2—§2.7, §3.3

～ 的一般形式 §2.2

～ 的泛函极限定理 §4.1

B- 值随机过程的 ～ §3.2

Gauss 过程的 ～ §2.0, §2.2, §4.0, §4.2

l^∞ 值 ～～ §3.4

l^p 值 ～～ §3.3, §4.6

无穷维 ～～ §3.0

两参数 ～～ §2.0, §2.6

Gauss 过程局部时的 ～ §2.7

O-U 过程的 ～ §2.2

l^∞ 值 ～～ §2.2

O-U 过程无穷级数的 ～ §4.6
分数 Wiener 过程的 ～ §2.0, §2.2
两参数 ～～ §2.3
平稳 ～ §2.0, §2.1, §2.2, §2.5, §2.7, §3.3, §4.1, §4.2, §4.6
两参数 Lévy-Wiener 过程的 ～ §2.4
两参数 O-U 过程的 ～ §2.5
两参数 Wiener 过程的 ～ §2.3
两参数分数 Lévy-Wiener 过程的 ～ §2.4
独立 ～ §1.1, §2.0, §2.2—§2.6, §4.5, §4.6
滞后 ～ §2.2

外文字

Borel-Cantelli 引理 §2.1—§2.7, §3.2—§3.4, §4.1—§4.5
Dirichlet 型 §3.1
Fernique 条件 §2.1
gamma 函数 §2.7
Gauss 分布 §1.0
Gauss 过程 §1.0—§1.2, §2.0—§2.7, §3.1—§3.4, §4.0—§4.2, §4.6
～ 的 p 变差 §4.6
～ 的小球概率 §4.0, §4.2
～ 的下极限 §4.0, §4.3, §4.4
～ 的分形性质 §4.6
～ 的占有时 §2.7
～ 的有界性 §2.1
～ 的连续性 §2.1
～ 的连续模 §2.0, §2.2
～ 的局部时 §2.0, §2.7
～ 的重对数律 §4.0
～ 的 Strassen 泛函重对数律 §4.0
～ 的 Chung 重对数律 §4.0, §4.1, §4.2
～ 的 Erdös-Révész 重对数律 §4.0, §4.1
～ 的增量 §2.0, §2.2
l^∞ 值 ～ §3.4
l^p 值 ～ §2.1, §3.1, §3.2, §4.4, §4.6
(N,d,α) ～ §4.6
零均值 ～ §1.0, §1.1, §2.1—§2.7, §3.1, §3.3, §4.2, §4.4, §4.6
无穷维 ～ §3.0
可分 ～ §0.1, §1.1, §2.2, §2.4, §4.1, §4.2
平稳 ～ §0.1, §1.2, §2.1, §2.4, §2.7, §3.1, §3.3, §4.1, §4.3, §4.4
向量值 ～ §2.1
自相似 ～ §3.3, §4.1
具有平稳增量的 ～ §2.1, §2.7, §3.3, §4.0, §4.3, §4.4, §4.6
两参数 ～ §2.0, §2.6, §4.5
带核的 ～～ §2.6
～～ 的下极限 §4.5
独立增量 ～ §2.5, §2.6, §4.5
Gauss 场 §4.0—§4.3
～ 的 Chung 重对数律 §4.0, §4.1
～ 的小球概率 §4.3
～ 的图 §4.6
～ 的像 §4.6
指数为 α 的 (N,d) ～ §4.6
Gauss 向量 §1.0, §1.2, §4.3
Gauss 变量 §1.0, §1.1, §2.1, §2.5, §4.6
Gauss 相关性猜测 §1.2

Gauss 随机测度　§4.2, §4.3
Hausdorff 测度　§4.6
Hausdorff 维数　§2.5, §4.6
Hölder 范数　§4.1, §4.2
Itô-Nisio 定理　§2.1
Kiefer 过程　§2.6
Lévy-Wiener 过程
　两参数 ~　§2.0, §2.4
　两参数分数 ~　§2.0, §2.4
　分数 Lévy-Wiener 场　§4.3
Ornstein-Uhlenbeck (O-U) 过程　§2.0, §2.5, §2.6, §2.7, §3.1, §3.3, §3.4, §4.1, §4.2, §4.4, §4.6
　~ 的无穷级数　§2.1, §2.6, §2.7, §4.2, §4.3, §4.4, §4.6
　~ 生成的 l^2- 模平方过程　§3.3
　l^∞ 值 ~　§3.4
　l^p 值 ~　§3.1
　l^p 值分数 ~　§3.3, §4.6
　l^2 值 ~　§3.1
　分数 ~　§3.3, §4.6
　两参数 ~　§2.0, §2.5, §2.6, §4.5
　　~ ~ 的不可微模　§4.5
　　~ ~ 的 Chung 重对数律　§4.5
packing 测度　§4.6
packing 维数　§4.6
r.k. (再生核) Hilbert 空间　§4.1
r.k. (再生核) 函数　§4.1
Sobolev 范数　§4.2
Stirling 公式　§2.7
Wiener 过程　§1.1, §2.1—§2.7, §3.3, §4.1—§4.6
　~ 的 Erdös-Révész 重对数律　§4.1
　~ 的 2 变差　§4.6
　~ 的泛函连续模　§4.1
　~ 的图集　§4.6
　~ 的像集　§4.6
　~ 增量的泛函极限定理　§4.1
　l^p 值 ~　§4.1
　p 维 ~　§4.1
　两参数 ~　§2.0, §2.3, §2.5, §2.6, §4.4
　　~ ~ 的 Chung 重对数律　§4.5
　　~ ~ 的 Lacey 型重对数律　§4.4
　　~ ~ 的下极限　§2.3, §4.5
　　~ ~ 的连续模　§2.3
　　~ ~ 的增量　§2.3
Wiener 单　§4.1, §4.3
0-1 律　§4.3, §4.4

注 * §n.0 表示第 n 章引言部分.